3

Introducción a la programación lineal

La programación lineal (PL) es una herramienta para resolver problemas de optimización. En 1947, George Dantzig desarrolló un método efectivo, el algoritmo simplex, para resolver problemas de programación lineal (también conocido como PL). Desde que surgió dicho algoritmo, la PL se utiliza para resolver problemas de optimización en industrias diversas, como los bancos, la educación, silvicultura, petróleo y transporte de carga. En un estudio de las 500 empresas de *Fortune*, 85% de las personas que contestaron la encuesta dijo que había usado programación lineal. Como una medida de la importancia de la programación lineal en investigación de operaciones, alrededor de 70% del material de este libro se enfoca en la programación lineal y las técnicas de optimización relacionadas.

En la sección 3.1, el estudio de la programación lineal se inicia describiendo las características generales que comparten los problemas de programación lineal. En la sección 3.2 y 3.3, se muestra cómo resolver en forma gráfica los problemas de programación lineal que contienen sólo dos variables. Al resolver esta programación lineal simple nos hará más sensibles para resolver problemas más complicados. En el resto del capítulo se explica cómo plantear modelos de programación lineal para situaciones de la vida cotidiana.

3.1 ¿Qué es un problema de programación lineal?

En esta sección se introduce la programación lineal y se definen los términos importantes que se usan para explicar los problemas de programación lineal.

EJEMPLO 1 Giapetto's Woodcarving (Juguetes de madera Giapetto)

Giapetto's Woodcarving, Inc., manufactura dos tipos de juguetes de madera: soldados y trenes. Un soldado se vende en 27 dólares y requiere 10 dólares de materia prima. Cada soldado que se fabrica incrementa la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 14 dólares. Un tren se vende en 21 dólares y utiliza 9 dólares de su valor en materia prima. Todos los trenes fabricados aumentan la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 10 dólares. La fabricación de soldados y trenes de madera requiere dos tipos de mano de obra especializada: carpintería y acabados. Un soldado necesita dos horas de trabajo de acabado y una hora de carpintería. Un tren requiere una hora de acabado y una hora de carpintería. Todas las semanas, Giapetto consigue todo el material necesario, pero sólo 100 horas de trabajo de acabado y 80 de carpintería. La demanda de trenes es ilimitada, pero se venden cuando mucho 40 soldados por semana. Giapetto desea maximizar las utilidades semanales (ingresos – costos). Diseñe un modelo matemático para la situación de Giapetto que se use para maximizar las utilidades semanales de la empresa.

Solución Al desarrollar el modelo para Giapetto se exploran las características que comparten todos los problemas de programación lineal.

Variables de decisión Se empieza por definir las **variables de decisión** pertinentes. En cualquier modelo de programación lineal, las variables de decisión deben describir por completo las decisiones que se tienen que tomar (en este caso, Giapetto). Evidentemente, Giapetto debe decidir cuántos soldados y trenes se deben fabricar cada semana. Sin olvidar lo anterior, se define

$$x_1 = \text{cantidad de soldados fabricados cada semana}$$
$$x_2 = \text{cantidad de trenes fabricados a la semana}$$

Función objetivo En cualquier problema de programación lineal, el que toma las decisiones desea maximizar (por lo regular, los ingresos o las utilidades) o reducir al mínimo (casi siempre, los costos) algunas funciones de las variables de decisión. La función que se desea maximizar o minimizar recibe el nombre de **función objetivo**. En lo que se refiere al problema de Giapetto, se observa que los *costos fijos* (como la renta o los seguros) no dependen de los valores de x_1 y x_2. Por consiguiente, Giapetto se puede concentrar en maximizar (los ingresos semanales) – (costos de compra de la materia prima) – (otros costos variables).

Los ingresos y los costos por semana de Giapetto, se pueden expresar en términos de las variables de decisión x_1 y x_2. Sería una tontería que Giapetto fabricara más soldados de los que pueden venderse, así que se supone que todos los juguetes producidos se venderán. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Ingresos por semana} &= \text{ingresos por semana proporcionados por los soldados}\\ &\quad + \text{ingresos por semana proporcionados por los trenes}\\ &= \left(\frac{\text{dólares}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right) + \left(\frac{\text{dólares}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right)\\ &= 27x_1 + 21x_2\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\text{Costos de la materia prima a la semana} = 10x_1 + 9x_2$$
$$\text{Otros costos variables a la semana} = 14x_1 + 10x_2$$

Entonces, Giapetto quiere maximizar

$$(27x_1 + 21x_2) - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

Otra manera de ver que Giapetto quiere maximizar $3x_1 + 2x_2$ es observar que

$$\begin{aligned}\text{Ingresos semanales} &= \text{contribución semanal a la utilidad por parte de los soldados}\\ &\quad - \text{costos no fijos semanales}\\ &\quad + \text{contribución semanal a la utilidad por parte de los trenes}\\ &= \left(\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right)\\ &\quad + \left(\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right)\end{aligned}$$

También,

$$\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{soldado}} = 27 - 10 - 14 = 3$$
$$\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{tren}} = 21 - 9 - 10 = 2$$

Entonces, al igual que antes, se obtiene

$$\text{Ingresos semanales} - \text{costos no fijos semanales} = 3x_1 + 2x_2$$

Por consiguiente, el objetivo de Giapetto es escoger x_1 y x_2 para maximizar $3x_1 + 2x_2$. Se utiliza la variable z para denotar el valor de la función objetivo de cualquier PL. La función objetivo de Giapetto es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

(De aquí en adelante se abrevia "maximizar" con *max* y "minimiza" con *min*.) El coeficiente de una variable en la función objetivo se denomina **coeficiente** de la variable **de la función objetivo.** Por ejemplo, el coeficiente de la función objetivo para x_1 es 3, y el coeficiente de la función objetivo para x_2 es 2. En este ejemplo (y en muchos otros problemas), el coeficiente de la función objetivo para cada variable es simplemente la contribución de la variable a la utilidad de la compañía.

Restricción A medida que x_1 y x_2 se incrementan, la función objetivo de Giapetto se hace más grande. Esto quiere decir que si Giapetto fuera libre para escoger cualquier valor para x_1 y x_2, la compañía podría tener unas utilidades arbitrariamente grandes al escoger x_1 y x_2 muy grandes. Desafortunadamente, los valores de x_1 y x_2 están controlados por las siguientes tres restricciones (con frecuencia llamadas **limitaciones**):

Restricción 1 Se pueden usar cada semana no más de 100 horas de tiempo de acabado.

Restricción 2 Cada semana se pueden usar no más de 80 horas de tiempo de carpintería.

Restricción 3 Debido a la demanda limitada, cuando mucho se deben producir cada semana 40 soldados.

Se supone que la cantidad de materia prima en existencia es ilimitada, así que no hay restricción alguna relacionada con esto.

El siguiente paso en el planteamiento de un modelo matemático para el problema de Giapetto es expresar las restricciones 1 a 3 en términos de las variables de decisión x_1 y x_2. Para expresar la restricción 1 de acuerdo con x_1 y x_2, obsérvese que

$$\begin{aligned}\frac{\text{Total de horas de acabado}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 2(x_1) + 1(x_2) = 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 1 se expresa como

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \tag{2}$$

Obsérvese que las unidades de todos los términos en (2) son horas de acabado por semana. *Para que una restricción sea razonable, todos los términos de la restricción deben tener las mismas unidades.* De lo contrario, uno está sumando peras con manzanas, por lo que la restricción no tendría significado alguno.

Para expresar la restricción 2 en términos de x_1 y x_2, nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\text{Horas totales de carpintería}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 1(x_1) + 1(x_2) = x_1 + x_2\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 2 se escribe como

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{3}$$

Obsérvese una vez más que las unidades de todos los términos en (3) son las mismas (en este caso, horas de carpintería a la semana).

Por último, el hecho de que cuando mucho se venden a la semana 40 soldados, se expresa limitando la producción semanal de soldados a máximo 40 de ellos. Así se tiene la siguiente restricción:

$$x_1 \leq 40 \tag{4}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (2) a (4) expresan las restricciones 1 a 3 en términos de las variables de decisión; se designan con el nombre de *restricciones* para el problema de programación lineal de Giapetto. Los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones se conocen con el nombre de **coeficientes tecnológicos.** La razón del nombre es que los coeficientes tecnológicos reflejan a menudo las tecnologías utilizadas para producir distintos productos. Por ejemplo, el coeficiente tecnológico de x_2 en (3) es 1, lo cual indica que un soldado requiere una hora de carpintería. El número en el segundo miembro de cada restricción se denomina **segundo miembro de la restricción (smr)**. Con frecuencia el smr representa la cantidad de un recurso que está disponible.

Restricciones de signo Se tiene que dar respuesta a las preguntas siguientes para cada variable de decisión con el fin de completar la formulación de un problema de programación lineal: la variable de decisión puede asumir sólo valores no negativos, o bien, ¿la variable de decisión puede asumir valores tanto positivos como negativos?

Si una variable de decisión x_i sólo puede asumir valores no negativos, entonces se añade la **restricción de signo** $x_i \geq 0$. Si una variable x_i puede asumir tanto valores positivos como negativos (o cero), entonces se dice que x_i **no tiene restricciones de signo** (se abrevia con frecuencia (**nrs**). Por lo que se refiere al problema de Giapetto, es evidente que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Pero algunas variables podrían ser nrs en otros problemas. Por ejemplo, si x_i representa un saldo en efectivo de la empresa, entonces x_i podría ser considerada negativa si la empresa debe más dinero del que tiene a mano. En este caso sería conveniente clasificar x_i como nrs. Otros usos de las variables nrs se tratan en la sección 4.12.

Si se combinan las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ con la función objetivo (1) y las restricciones (2) a (4), se obtiene el modelo de optimización siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{(Función objetivo)} \tag{1}$$

sujeto a (s.a)

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \qquad \text{(Restricción de acabado)} \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \qquad \text{(Restricción de carpintería)} \tag{3}$$

$$x_1 \qquad \leq 40 \qquad \text{(Restricción por la demanda de soldados)} \tag{4}$$

$$x_1 \qquad \geq 0 \qquad \text{(Restricción de signo)}^\dagger \tag{5}$$

$$x_2 \geq 0 \qquad \text{(Restricción de signo)} \tag{6}$$

"Sujeto a" (s.a) quiere decir que los valores de las variables de decisión x_1 y x_2 deben satisfacer todas las limitaciones y todas las restricciones de signo.

Antes de definir de modo formal un problema de programación lineal, se establecen los conceptos de función lineal y desigualdad lineal.

DEFINICIÓN ■ Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una **función lineal** si y sólo si para algún conjunto de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. ■

Por ejemplo, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ es una función lineal de x_1 y x_2, pero $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ no es una función lineal de x_1 y x_2.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cualquier número b las desigualdades $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ y $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ son **desigualdades lineales.** ■

Por consiguiente, $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ y $2x_1 + x_2 \geq 3$ son desigualdades lineales, pero $x_1^2x_2 \geq 3$ no es una desigualdad lineal.

† Las restricciones de signo limitan a usar ciertos valores para las variables de decisión, pero preferimos considerar las restricciones de signo como si estuvieran separadas de las limitaciones del problema. La razón será evidente cuando se estudie el algoritmo simplex en el capítulo 4.

DEFINICIÓN ■ Un **problema de programación lineal** (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

1 Se intenta maximizar (minimizar) una función *lineal* de las variables de decisión. La función que se desea maximizar o minimizar se llama *función objetivo*.

2 Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de *restricciones*. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una desigualdad lineal.

3 Se relaciona una *restricción de signo* con cada variable. Para cualquier variable x_i, la restricción de signo especifica que x_i no debe ser negativa ($x_i \geq 0$) o no tener restricciones de signo (nrs). ■

Como el objetivo de Giapetto es una función lineal de x_1 y x_2, y todas las restricciones de Giapetto son desigualdades lineales, el problema de Giapetto es de programación lineal. Obsérvese que el problema de Giapetto es característico de una amplia clase de problemas de programación lineal en los cuales el objetivo de quien toma las decisiones es maximizar la utilidad sujeta a recursos escasos.

Suposiciones de proporcionalidad y de aditividad

El hecho de que la función objetivo para una PL debe ser una función lineal de las variables de decisión, tiene dos consecuencias.

1 La contribución de la función objetivo para cada variable de decisión, es proporcional al valor de ésta. Por ejemplo, la contribución a la función objetivo por hacer cuatro soldados ($4 \times 3 = \$12$) es exactamente cuatro veces la contribución a la función objetivo por hacer un soldado (\$3).

2 La contribución a la función objetivo para cualquier variable, es independiente de los valores de las otras variables de decisión. Es decir, no importa cuál sea el valor de x_2, pero la manufactura de x_1 soldados siempre contribuirá con $3x_1$ dólares a la función objetivo.

De manera similar, el hecho de que cada restricción de PL debe ser una desigualdad lineal o una ecuación lineal, tiene dos consecuencias:

1 La contribución de cada variable al primer miembro de cada restricción, es proporcional al valor de la variable. Por ejemplo, se requieren exactamente tres veces más horas de acabado ($2 \times 3 = 6$ horas de acabado) para manufacturar tres soldados, que para fabricar un soldado (dos horas de acabado).

2 La contribución de una variable al primer miembro de cada restricción, es independiente de los valores de la variable. Por ejemplo, no importa cuál sea el valor de x_1, pero la manufactura de x_2 trenes requiere x_2 horas de acabado y x_2 horas de carpintería.

La primera consecuencia que se da en cada lista, se denomina **suposición de proporcionalidad de la programación lineal.** La consecuencia 2 de la primera lista, implica que el valor de la función objetivo es la suma de las contribuciones de cada una de las variables, y la consecuencia 2 de la segunda lista, es que el primer miembro de cada restricción es la suma de las contribuciones de cada variable. Por esta razón, la segunda consecuencia de cada lista se denomina **suposición aditiva de la programación lineal.**

Para que una programación lineal represente en forma adecuada una situación de la vida cotidiana, las variables de decisión deben satisfacer tanto la suposición de proporcionalidad como la de aditividad. También se tiene que cumplir con otras dos suposiciones antes de que una PL represente en forma adecuada una situación real: las suposiciones de divisibilidad y de certidumbre.

Suposición de divisibilidad

Esta suposición requiere que todas las variables de decisión puedan asumir valores fraccionarios. Por ejemplo, en el problema de Giapetto, la suposición de divisibilidad quiere decir que es aceptable fabricar 1.5 soldados o 1.63 trenes. Como Giapetto no puede producir en realidad una cantidad fraccionaria de trenes o de soldados, la suposición de divisibilidad no se cumple en el problema de Giapetto. Un problema de PL en el cual alguna de las variables, o todas, debe ser un número entero no negativo, recibe el nombre de **problema de programación entera.** La solución de los problemas de programación entera se trata en el capítulo 9.

En muchas situaciones donde la divisibilidad no está presente, el redondeo de las variables a un entero, en la solución óptima de PL, proporciona una solución razonable. Suponga que la solución óptima para una PL establece que una compañía de automóviles debe fabricar 150 000.4 vehículos compactos durante el presente año. En este caso, usted puede recomendar que la compañía fabrique 150 000 o 150 001 automóviles compactos, y tener la confianza de que ese valor se aproximaría de manera razonable a un plan de producción óptimo. Por otro lado, si el número de sitios para misiles que puede usar Estados Unidos fuera una variable en una PL y la solución óptima recomendara que se deberían construir 0.4 sitios, habría una gran diferencia si se redondeara el número de sitios a cero o a uno. En esta situación, se podrían aplicar los métodos de programación entera del capítulo 9, porque el número de sitios para misiles definitivamente no es divisible.

Suposición de certidumbre

Para esta suposición, se requiere conocer con certeza todos los parámetros (coeficiente de la función objetivo, segundo miembro y coeficientes tecnológicos. Si hay incertidumbre en la cantidad exacta de horas de carpintería y acabado necesarias para manufacturar un tren, se incurriría en una violación a la suposición de certidumbre.

Regiones factibles y solución óptima

Dos de los conceptos más básicos relacionados con los problemas de programación lineal, son región factible y solución óptima. Con el objeto de definir estos conceptos, se usa el término *punto* para señalar una especificación del valor para cada variable de decisión.

DEFINICIÓN ■ La **región factible** para una PL, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las limitaciones y las restricciones de signo de la PL. ■

Por ejemplo, en el problema de Giapetto, el punto ($x_1 = 40$, $x_2 = 20$) está en la región factible. Obsérvese que $x_1 = 40$ y $x_2 = 20$ cumplen con las limitaciones (2) a (4) y las restricciones de signo (5) y (6):

Restricción (2), $2x_1 + x_2 \leq 100$, se cumple porque $2(40) + 20 \leq 100$.

Restricción (3), $x_1 + x_2 \leq 80$, se cumple porque $40 + 20 \leq 80$.

Restricción (4), $x_1 \leq 40$, se cumple porque $40 \leq 40$.

Restricción (5), $x_1 \geq 0$, se cumple porque $40 \geq 0$.

Restricción (6), $x_2 \geq 0$, se cumple porque $20 \geq 0$.

Por otro lado, el punto ($x_1 = 15, x_2 = 70$) no está en la región factible porque si bien $x_1 = 15$ y $x_2 = 70$ satisfacen (2), (4), (5) y (6) no cumplen con (3): 15 + 70 no es menor o igual que 80. Se dice que cualquier punto que no está en la región factible es un **punto no factible.** Como ejemplo de un punto no factible, considérese ($x_1 = 40, x_2 = -20$). Aunque este punto cumple con todas las limitaciones y la restricción de signo (5), no es factible porque no satisface la restricción de signo (6), $x_2 \geq 0$. La región factible para el problema de Giapetto es el conjunto de planes de producción posibles que Giapetto debe considerar en la búsqueda de un plan de producción óptimo.

DEFINICIÓN ■ Para un problema de maximización, una **solución óptima** para una PL es un punto con el valor de la función objetivo más grande en la región factible. De igual manera, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto con el valor de la función objetivo más pequeño en la región factible. ■

La mayor parte de PL tiene sólo una solución óptima. Sin embargo, algunas PL no tienen solución óptima, y otras tienen una cantidad infinita de soluciones (estas situaciones se tratan en la sección 3.3). En la sección 3.2 se demuestra que la única solución óptima para el problema de Giapetto es ($x_1 = 20, x_2 = 60$). Esta solución genera un valor de la función objetivo de

$$z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20) + 2(60) = 180 \text{ dólares}$$

Cuando se dice que ($x_1 = 20, x_2 = 60$) es la solución óptima para el problema de Giapetto, lo que se quiere dar a entender es que ningún punto en la región factible tiene un valor de la función objetivo que sobrepase 180. Giapetto puede maximizar la utilidad si fabrica 20 soldados y 60 trenes cada semana. Si Giapetto produjera 20 soldados y 60 trenes cada semana, las utilidades semanales serían 180 dólares menos costos fijos semanales. Por ejemplo, si los únicos costos fijos de Giapetto fueran renta de 100 dólares por semana, entonces la utilidad a la semana sería de 180 − 100 = 80 dólares por semana.

PROBLEMAS

Grupo A

1 El agricultor Jones debe decidir cuántos acres de maíz y trigo tiene que plantar este año. Un acre de trigo produce 25 bushels de trigo y requiere 10 horas de trabajo por semana. Un acre de maíz produce 10 bushels de maíz y requiere cuatro horas de trabajo a la semana. Todo el trigo se vende a 4 dólares el bushel, y el maíz se vende a 3 dólares el bushel. Se dispone de siete acres de tierra y 40 horas por semana de trabajo. Las regulaciones gubernamentales establecen que por lo menos 30 bushels de maíz se produzcan durante el año actual. Sea x_1 = número de acres con siembra de maíz y x_2 = número de acres con siembra de trigo. Utilice estas variables de decisión y plantee una PL cuya solución le indique al agricultor Jones cómo maximizar el ingreso total a partir del trigo y el maíz.

2 Conteste estas preguntas relacionadas con el problema 1:

a ¿Está ($x_1 = 2, x_2 = 3$) en la región factible?

b ¿Está ($x_1 = 4, x_2 = 3$) en la región factible?

c ¿Está ($x_1 = 2, x_2 = -1$) en la región factible?

d ¿Está ($x_1 = 3, x_2 = 2$) en la región factible?

3 Utilice las variables x_1 = número de bushels de maíz producido y x_2 número de bushels de trigo producidos para replantear la PL del agricultor Jones.

4 Truckco fabrica dos tipos de camiones: el 1 y el 2. Cada camión debe pasar por el taller de pintura y el taller de ensamble. Si el taller de pintura estuviera destinado del todo a pintar los camiones tipo 1, entonces se podrían pintar 800 por día; si el taller de pintura estuviera dedicado por completo a pintar los camiones tipo 2, entonces se podrían pintar 700 por día. Si el taller de ensamble se dedicara sólo a ensamblar motores para los camiones tipo 1, entonces se podrían ensamblar 1 500 por día; si el taller de ensamble se dedicara sólo a ensamblar motores para los camiones tipo 2, entonces se podrían ensamblar 1 200 por día. Cada camión tipo 1 contribuye con 300 dólares a las utilidades; cada camión tipo 2 contribuye con 500 dólares. Plantee un PL que maximice las utilidades de Truckco.

Grupo B

5 ¿Por qué no se permite que un PL tenga limitaciones < o >?

3.2 Solución gráfica de los problemas de programación lineal de dos variables

Es posible resolver en forma gráfica cualquier PL de dos variables. Las variables se denominan siempre x_1 y x_2, y los ejes coordenados, ejes x_1 y x_2. Suponga que se desea graficar el conjunto de puntos que satisface

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \tag{7}$$

El mismo conjunto de puntos (x_1, x_2) satisface

$$3x_2 \leq 6 - 2x_1$$

Esta última desigualdad se podría escribir también como

$$x_2 \leq \tfrac{1}{3}(6 - 2x_1) = 2 - \tfrac{2}{3}x_1 \tag{8}$$

Puesto que al desplazarse hacia abajo sobre la gráfica decrece x_2 (véase figura 1), el conjunto de puntos que satisface (8) y (7) queda sobre la recta $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x$. o debajo de ella. Este conjunto de puntos se señala con un sombreado más oscuro en la figura 1. Sin embargo, nótese que $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$, $3x_2 = 6 - 2x_1$ y $2x_1 + 3x_2 = 6$ son la misma recta. Esto significa que el conjunto de puntos que satisface (7) queda sobre la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ o debajo de ella. De igual manera, el conjunto de puntos que satisface $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ queda sobre la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ o arriba de ella. (Estos puntos de indican con un sombreado menos oscuro en la figura 1.)

Considérese una limitación de desigualdad lineal de la forma $f(x_1, x_2) \geq b$ o $f(x_1, x_2) \leq b$. En general, se puede demostrar que, en dos dimensiones, el conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal comprende los puntos en la recta $f(x_1, x_2) = b$, que define la desigualdad más todos los puntos de un lado de la recta.

Hay una manera fácil de determinar el lado de la recta para el cual la desigualdad tal como $f(x_1, x_2) \leq b$ o $f(x_1, x_2) \geq b$ se cumple. Justamente se escoge cualquier punto P que no satisfaga la recta $f(x_1, x_2) = b$. Se determina si P satisface la desigualdad. Si es así, entonces todos los puntos del *mismo* lado que P de $f(x_1, x_2) = b$ satisfarán la desigualdad. Pero si P no cumple con la desigualdad, entonces todos los puntos sobre el *otro* lado de $f(x_1, x_2) = b$, que no contiene a P, satisfarán la desigualdad. Por ejemplo, para determinar cuáles son los puntos que satisfacen a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ (puntos arriba o abajo de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$), se observa que (0, 0) no satisface $2x_1 + 3x_2 \geq 6$. Como (0, 0) está *abajo* de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$, el conjunto de puntos que cumple con $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ comprende la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ y los puntos por *arriba* de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$. Todo esto está de acuerdo con la figura 1.

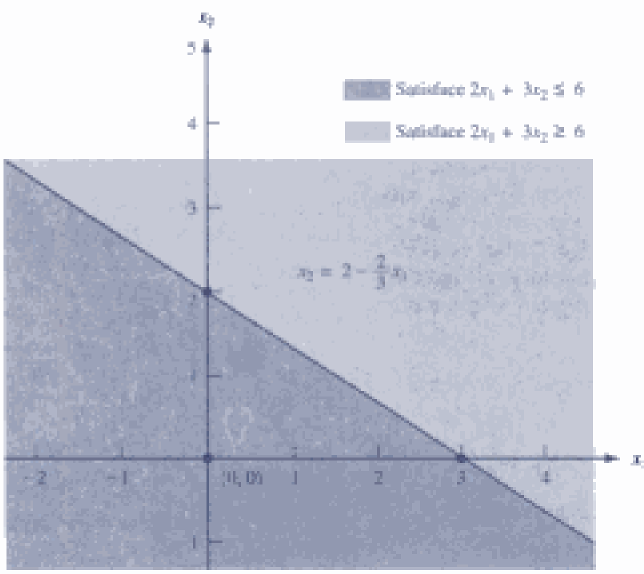


FIGURA 1
Gráfica de una desigualdad lineal

Cómo determinar la solución factible

Ahora se ilustra cómo resolver en forma gráfica PL de dos variables mediante la resolución del problema de Giapetto. Para empezar, se determina en forma gráfica la región factible para el problema de Giapetto. La región factible para el problema de Giapetto es el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2) que satisfacen

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 100 && \text{(Limitaciones)} && (2)\\
x_1 + x_2 &\le 80 && && (3)\\
x_1 \qquad &\le 40 && && (4)\\
x_1 \qquad &\ge 0 && \text{(Restricciones de signo)} && (5)\\
x_2 &\ge 0 && && (6)
\end{aligned}
$$

Para que un punto (x_1, x_2) esté en la región factible, (x_1, x_2) debe satisfacer *todas* las desigualdades (2) a (6). Obsérvese que los únicos puntos que cumplen (5) y (6) quedan en el primer cuadrante del plano x_1-x_2. Lo anterior se indica en la figura 2 mediante las flechas que señalan a la derecha del eje x_2 y hacia arriba del eje x_1. Por lo tanto, cualquier punto que esté fuera del primer cuadrante no puede estar en la región factible. Esto significa que la región factible es el conjunto de puntos que se encuentra en el primer cuadrante y que cumple con (2) a (4).

El método para determinar el conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal, también identificará los que cumplen con (2) a (4). En la figura 2 se observa que todos los puntos que se encuentran abajo de la recta *AB* o sobre ella (*AB* es la recta $2x_1 + x_2 = 100$). Todos los puntos que se encuentran abajo de la recta *CD* o sobre ella (*CD* es la recta $x_1 + x_2 = 80$) cumplen con la desigualdad (3). Por último, todos los puntos que se encuentran a la izquierda de la recta *EF* o sobre ella (*EF* es la recta $x_1 = 40$) cumplen con (4). El lado de una recta que satisface una desigualdad se indica por la dirección de las flechas en la figura 2.

En la figura 2 se observa que el conjunto de puntos del primer cuadrante que cumple con (2), (3) y (4) está limitado por el polígono de cinco lados *DGFEH*. Cualquier punto en este polígono o en su interior está en la región factible. Cualquier otro punto no satisface ni una de las desigualdades (2) a (6). Por ejemplo, el punto (40, 30) queda fuera de *DGFEH* porque está arriba del segmento de recta *AB*. Por lo tanto, (40, 30) es no factible porque no satisface (2).

Un modo fácil de encontrar la región factible es determinar el conjunto de puntos no factibles. Nótese que todos los puntos por arriba de la recta *AB* de la figura 2 son no fac-

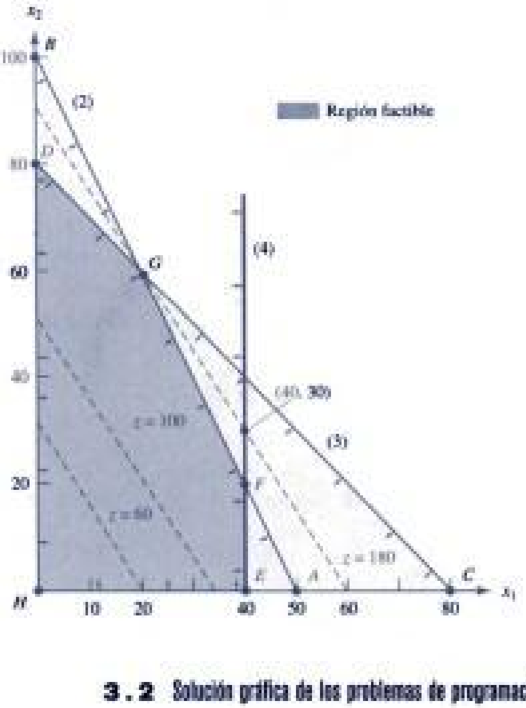


FIGURA 2
Solución gráfica del problema de Giapetto

tibles, porque incumplen con (2). De manera similar, todos los puntos por arriba de *CD* son no factibles, porque no satisfacen (3). Asimismo, todos los puntos a la derecha de la vertical *EF* son no factibles, porque no se ajustan a (4). Después de que todos estos puntos son eliminados, sólo quedan los de la región factible (*DGFEH*).

Cómo determinar la solución óptima

Tras haber identificado la región factible para el problema de Giapetto, se busca la solución óptima, la cual es el punto de la región factible con el valor más grande de $z = 3x_1 + 2x_2$. Para encontrar la solución óptima, es necesario graficar una recta en la cual todos los puntos tengan el mismo valor z. En un problema de maximización, esta recta recibe el nombre de **recta de isoutilidad** (en un problema de minimización, **recta de isocostos**). Para trazar una recta de isoutilidad, se escoge un punto en la región factible y se calcula su valor z. Sea el punto (20, 0). Para (20, 0), $z = 3(20) + 2(0) = 60$. Por consiguiente, (20, 0) queda en la recta de isoutilidad $z = 3x_1 + 2x_2 = 60$. Si se vuelve a escribir $3x_1 + 2x_2 = 60$ como $x_2 = 30 - \frac{3}{2}x_1$, entonces la recta de isoutilidad $3x_1 + 2x_2 = 60$ tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$. Puesto que todas las rectas de isoutilidad son de la forma $3x_1 + 2x_2 =$ constante, todas las rectas de isoutilidad tienen la misma pendiente. *Esto significa que una vez que se trazó una recta de isoutilidad, es posible encontrar todas las otras rectas de isoutilidad, desplazándose en forma paralela a la recta de isoutilidad que ya se graficó.*

Ya queda claro cómo encontrar la solución óptima para una PL de dos variables. Después de trazar una sola recta de isoutilidad, es posible generar otras rectas de isoutilidad desplazándose en forma paralela a la recta ya graficada en una dirección en que se incremente z (en el caso de un problema de maximización). Después de un punto, las rectas de isoutilidad ya no intersecan la región factible. La última recta de isoutilidad que corta (toca) la región factible define el valor z más grande de cualquier punto en la región factible, e indica la solución óptima para la PL. En este problema, la función objetivo $z = 3x_1 + 2x_2$ aumenta al desplazarse en una dirección para la cual tanto x_1 como x_2 se incrementan. Por lo tanto, usted puede construir otras rectas de isoutilidad mientras se desplaza en forma paralela a $3x_1 + 2x_2 = 60$ en una dirección hacia el noreste (hacia arriba y hacia la derecha). En la figura 2, se puede observar que la recta de isoutilidad que pasa por el punto *G* es la última recta que interseca la región factible. Por consiguiente, *G* es el punto con el valor z más grande en la región factible y, por lo tanto, la solución óptima al problema de Giapetto. Obsérvese que el punto *G* es donde se cortan las rectas $2x_1 + x_2 = 100$ y $x_1 + x_2 = 80$. Al resolver estas ecuaciones en forma simultánea, se obtiene que ($x_1 = 20$, $x_2 = 60$) es la solución óptima para el problema de Giapetto. El valor óptimo de z se encuentra al sustituir estos valores de x_1 y x_2 en la función objetivo. Entonces, el valor óptimo de z es $z = 3(20) + 2(60) = 180$.

Restricciones activas

Tras haber determinado la solución óptima para una PL, es útil (véanse capítulos 5 y 6) clasificar cada restriccion en restricciones activas (obligatorias) e inactivas.

DEFINICIÓN ■ Una restricción es activa u obligatoria si tanto el primero como el segundo miembros de las restricciones son iguales cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción. ■

Por lo tanto, (2) y (3) son restricciones activas.

DEFINICIÓN ■ Una restricción es inactiva si no son iguales el primero y el segundo miembros de la restricción cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción. ■

Como $x_1 = 20$ es menor que 40, (4) es una restricción inactiva.

Conjuntos convexos, puntos extremos y PL

La región factible para el problema de Giapetto es un ejemplo de un conjunto convexo

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de puntos S es un **conjunto convexo** si el segmento de recta que une cualquier par de puntos en S está totalmente contenido en S. ■

En la figura 3 se ilustran cuatro configuraciones de esta definición. Cada segmento de recta que une dos puntos en S, contiene sólo puntos en S en las figuras 3a y 3b. Por lo tanto, en estas dos figuras, S es convexo, pero en las figuras 3c y 3d, S no es convexo. En cada figura, los puntos A y B están en S, pero hay puntos en el segmento de recta AB que no están contenidos en S. En el estudio de la programación lineal, un cierto tipo de puntos en un conjunto convexo (denominados *puntos extremos*) es de gran interés.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier conjunto convexo S, un punto P en S es un **punto extremo** si para cada segmento de recta que está completamente en S y contiene al punto P, éste es un punto terminal del segmento de recta. ■

Por ejemplo, en la figura 3a, cada punto de la circunferencia es un punto extremo del círculo. En la figura 3b, los puntos A, B, C y D son puntos extremos de S. Aunque el punto E está en el límite de S en la figura 3b, E no es un punto extremo de S porque E está en el segmento de recta AB (AB está completamente en S), y no es un punto terminal del segmento de recta AB. Los puntos extremos reciben algunas veces el nombre de **vértices** porque si el conjunto S es un polígono, los puntos extremos de S serán los vértices, o esquinas, del polígono.

La región factible del problema de Giapetto es un conjunto convexo. Esto no es un accidente: se puede demostrar que la región factible para cualquier PL es un conjunto convexo. En la figura 2 se observa que los puntos extremos de la región factible son simplemente los puntos D, F, E, G y H. Se puede demostrar que la región factible para cualquier PL tiene sólo un número infinito de puntos extremo. También nótese que la solución óptima para el problema de Giapetto (punto G) es un punto extremo de la región factible. Se puede demostrar que *cualquier PL que tiene una solución óptima tiene un punto extremo que es óptimo.* Este resultado es muy importante porque disminuye el conjunto de puntos que generan una solución óptima a partir de toda la región factible (la cual contiene por lo regular un número *infinito* de puntos) hasta el conjunto de puntos extremo (un conjunto *finito*).

Por lo que toca al problema de Giapetto, es fácil ver por qué la solución óptima debe ser un punto extremo de la región factible. Se observa que z aumenta a medida que las rectas de isoutilidades se desplazan en una dirección noreste, de tal manera que los valores más grandes de z en la región factible deben presentarse en algún punto P que no tiene puntos en la región factible al noreste de P. Esto significa que la solución óptima debe quedar en algún lugar sobre el límite de la región factible $DGFEH$. La PL debe tener un punto extremo que es óptimo, porque para cualquier segmento de recta sobre el límite de la región factible, el valor más grande de z sobre el segmento de recta debe estar en uno de los puntos terminales del segmento de recta.

Para entender lo anterior, véase el segmento de recta FG de la figura 2. FG es parte de la recta $2x_1 + x_2 = 100$ de pendiente -2. Si uno se mueve a lo largo de FG y disminuye x_1 en 1, entonces x_2 aumentará en dos, y el valor de z cambia como sigue: $3x_1$ cae a $3(1) = 3$

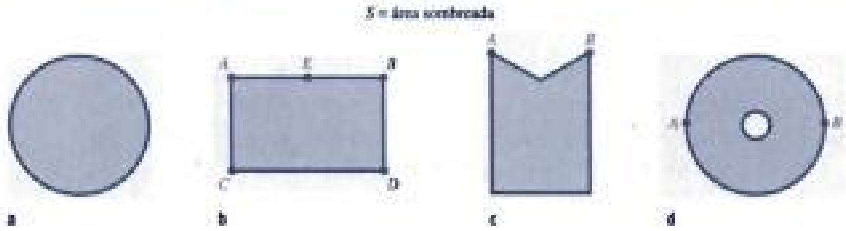


FIGURA 3
Conjuntos convexos y no convexos

y $2x_2$ sube a $2(2) = 4$. Por consiguiente, z aumenta en total a $4 - 3 = 1$. Esto significa que al desplazarse a lo largo de FG en una dirección en la que decrece x_1 se incrementa z. Por lo tanto, el valor de z en el punto G debe sobrepasar el valor de z en cualquier otro punto del segmento de recta FG.

Un razonamiento similar demuestra que para cualquier función objetivo, el valor máximo de z en un segmento de recta dado debe encontrarse en un punto terminal del segmento de recta. Por lo tanto, para cualquier PL, el valor más grande de z en la región factible debe estar en el punto terminal o extremo de uno de los segmentos de recta que forman el límite de dicha región. En pocas palabras, uno de los puntos extremo de la región factible debe ser óptimo. (Para comprobar que ya entendió el concepto, demuestre que si la función objetivo del problema de Giapetto fuera $z = 6x_1 + x_2$, el punto F sería el óptimo, en tanto que si la función objetivo de Giapetto fuera $z = x_1 + 6x_2$, el punto D sería el óptimo).

La prueba de que una PL siempre tiene un punto extremo óptimo dependía en gran medida del hecho de que tanto la función objetivo como las restricciones fueran funciones lineales. En el capítulo 11, se demuestra que para un problema de optimización en el cual la función objetivo o algunas de las restricciónes no son lineales, la solución óptima para el problema de optimización podría no encontrarse en un punto extremo.

Solución gráfica de los problemas de minimización

EJEMPLO 2 Dorian auto

Dorian Auto fabrica automóviles de lujo y camiones. La compañía opina que sus clientes más idóneos son hombres y mujeres de altos ingresos. Para llegar a estos grupos, Dorian Auto ha emprendido una ambiciosa campaña publicitaria por TV, y decidió comprar comerciales de un minuto en dos tipos de programas: programas de comedia y juegos de futbol americano. Cada comercial en programas de comedia lo ven 7 millones de mujeres de altos ingresos y 2 millones de hombres también de altos ingresos. Dos millones de mujeres de altos ingresos y 12 millones de hombres de altos ingresos ven cada comercial en juegos de futbol. Un anuncio de un minuto en los programas de comedia cuesta 50 000 dólares, y un comercial de un minuto en el juego de futbol cuesta 100 000 dólares. A Dorian le gustaría que por lo menos 28 millones de mujeres de altos ingresos y 24 millones de hombres de altos ingresos vieran sus comerciales. Utilice la programación lineal para determinar cómo Dorian puede alcanzar sus objetivos publicitarios al mínimo costo.

Solución Dorian debe decidir cuántos anuncios en los programas de comedia y en el de futbol debe comprar, por lo que las variables de decisión son

x_1 = número de anuncios de un minuto comprados en programas de comedia
x_2 = número de anuncios de un minuto comprados en los juegos de futbol

Luego, Dorian quiere minimizar el costo total de los anuncios (en miles de dólares).

Costo total de los anuncios
= costo de los anuncios en programas de comedia + costo de los anuncios en juegos de futbol

$$= \left(\frac{\text{costo}}{\text{anuncio en programas de comedia}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{array}\right)$$

$$+ \left(\frac{\text{costo}}{\text{anuncio en el futbol}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{array}\right)$$

$$= 50x_1 + 100x_2$$

Entonces, la función objetivo de Dorian es

$$\min z = 50x_1 + 100x_2 \tag{9}$$

Dorian se enfrenta a las siguientes limitaciones:

Restricción 1 Los anuncios deben alcanzar por lo menos a 28 millones de mujeres de altos ingresos.

Restricción 2 Los anuncios deben llegar por lo menos a 24 millones de hombres de altos ingresos.

Para expresar las limitaciones 1 y 2 en términos de x_1 y de x_2, sea MAI las mujeres televidentes de altos ingresos y HAI los hombres televidentes de altos ingresos (en millones).

$$\begin{aligned}
\text{MAI} &= \left(\frac{\text{MAI}}{\text{anuncios en programas de comedia}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{matrix}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\text{MAI}}{\text{anuncios en el futbol}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{matrix}\right)\\
&= 7x_1 + 2x_2\\
\text{HAI} &= \left(\frac{\text{HAI}}{\text{anuncios en programas de comedia}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{matrix}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\text{HAI}}{\text{anuncios en el futbol}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{matrix}\right)\\
&= 2x_1 + 12x_2
\end{aligned}$$

La restricción 1 ya se puede expresar como

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28 \tag{10}$$

y la restricción 2 se podría expresar como

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24 \tag{11}$$

Las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ son necesarias, así que el PL de Dorian está dada por

$$\begin{aligned}
\min z &= 50x_1 + 100x_2 \\
\text{s.a} \quad 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 \qquad \text{(MAI)}\\
2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \qquad \text{(HAI)}\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Este problema es característico de una gran diversidad de aplicaciones de PL, en las cuales el que toma la decisión desea minimizar el costo de cumplir un cierto conjunto de exigencias. Con el fin de resolver en forma gráfica este PL, se empieza por graficar la región factible (figura 4). Obsérvese que los puntos que se encuentran en la recta AB o arriba de ella (AB es una parte de la recta $7x_1 + 2x_2 = 28$) satisfacen (10) y que los puntos que se encuentran en la recta CD o arriba de ella (CD es una parte de la recta $2x_1 + 12x_2 = 24$) satisfacen (11). En la figura 4, se observa que los únicos puntos del primer cuadrante que satisfacen tanto a (10) como a (11), son los puntos de la región sombreada limitada por el eje x_1, CEB, y por el eje x_2.

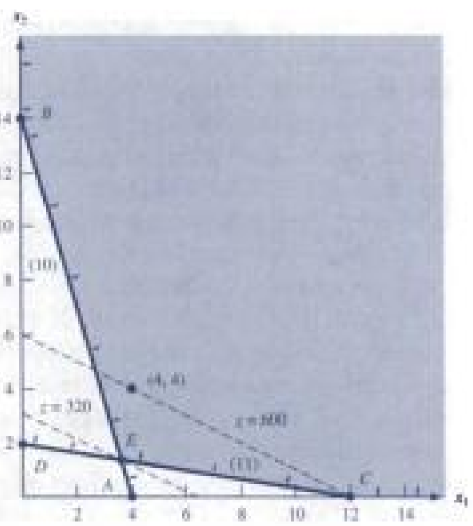


FIGURA 4
Solución gráfica para el problema de Dorian

Al igual que en el problema de Giapetto, el problema de Dorian tiene una región factible convexa, pero la región factible de Dorian contiene puntos para los cuales el valor de al menos una variable puede ser arbitrariamente grande, al contrario que en el caso de Giapetto. Una región factible de este tipo se llama **región factible no acotada.**

Dado que Dorian desea minimizar el costo total de los anuncios, la solución óptima del problema es el punto que tenga el valor z *más pequeño* en la región factible. Para encontrar la solución óptima, es necesario trazar una *recta de isocostos* que cruza la región factible. Una recta de isocostos es cualquier recta en la cual todos los puntos tienen el mismo valor z (el mismo costo). Se escoge en forma arbitraria la recta de isocostos que pasa por el punto ($x_1 = 4, x_2 = 4$). Para este punto, $z = 50(4) + 100(4) = 600$, y se grafica la recta de isocostos $z = 50x_1 + 100x_2 = 600$.

Se consideran las rectas paralelas a la recta de isocostos $50x_1 + 100x_2 = 600$ en la dirección en que decrece z (suroeste). El último punto en la región factible que cruza una recta de isocostos será el punto en la región factible que tiene el valor más pequeño de z. En la figura 4 se puede ver que el punto E tiene el valor z más pequeño que cualquier punto en la región factible; ésta es la solución óptima para el problema de Dorian. Obsérvese que el punto E es donde se cortan las rectas $7x_1 + 2x_2 = 28$ y $2x_1 + 12x_2 = 24$. Al resolver en forma simultánea estas ecuaciones, se obtiene la solución óptima ($x_1 = 3.6, x_2 = 1.4$). El valor óptimo de z se determina al sustituir estos valores de x_1 y x_2 en la función objetivo. Entonces, el valor óptimo de z es $z = 50(3.6) + 100(1.4) = 320 = 320\,000$. dólares. Puesto que con el punto E se cumplen las limitaciones MAI y HAI de igualdad, ambas limitaciones son activas.

¿El modelo de Dorian cumple con las suposiciones de la programación lineal señaladas en la sección 3.1?

Para que la Suposición de proporcionalidad sea válida, cada anuncio extra en programas de comedia debe añadir exactamente siete millones de MAI y dos millones de HAI. Estos valores contradicen la evidencia empírica, la cual señala que después de un cierto punto los comerciales originan menores ganancias. Después de 500 comerciales de automóviles, por ejemplo, que se han lanzado al aire, la mayoría de las personas quizá ha visto uno, por lo que ya no deja nada bueno lanzar al aire más anuncios. Por consiguiente, se viola la Suposición de proporcionalidad.

Se utiliza la Suposición de Aditividad para justificar escribir (total de MAI televidentes) = (MAI televidentes de los anuncios en programas de comedia) + (MAI televidentes de los anuncios de futbol). Muchos verán, en realidad, un comercial de Dorian en programas de comedia, así como un anuncio en el futbol. Se está contando dos veces a estas personas, lo cual crea un panorama impreciso del número total de personas que ven los anuncios de Dorian. El hecho de que la misma persona vea más de un tipo de anuncio quiere decir que la efectividad de un anuncio en programas de comedia depende de la cantidad de comerciales en el futbol. Esto viola la Suposición de Aditividad.

Si sólo hay comerciales de un minuto, entonces no es razonable recomendar que Dorian compre 3.6 anuncios en programas de comedia y 1.4 comerciales en el futbol, por lo que se viola la Suposición de divisibilidad; entonces, el problema de Dorian se debe considerar como un problema de programación entera. En la sección 9.3 se demuestra que si el problema de Dorian se resuelve como un problema de programación entera, entonces el costo mínimo se consigue al escoger ($x_1 = 6, x_2 = 1$) o bien ($x_1 = 4, x_2 = 2$). Para cualquiera de las soluciones, el costo mínimo es 400 000 dólares. Esta cantidad es 25% superior al costo que se obtiene a partir de la solución óptima de PL.

Como no hay manera de saber con certeza cuántos televidentes se suman por cada tipo de comercial, también se incumple la suposición de certidumbre. Por lo tanto, todas las suposiciones de la programación lineal se incumplen en el problema de Dorian Autos. A pesar de estas desventajas, los analistas han usado modelos similares para ayudar a las empresas a determinar su mezcla de productos óptima (plan de producción óptimo).†

†Lilien y Kotler (1983).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva en forma gráfica el problema 1 de la sección 3.1.

2 Resuelva en forma gráfica el problema 4 de la sección 3.1.

3 Leary Chemical fabrica tres productos químicos: A, B y C. Estos productos de obtienen por medio de dos procesos de producción: 1 y 2. El desarrollo del proceso 1 durante una hora cuesta 4 dólares y produce tres unidades de A, una de B y una de C. Efectuar el proceso 2 durante una hora cuesta un dólar y se obtienen una unidad de A y una de B. Para cumplir con las demandas de los clientes se tienen que producir todos los días por lo menos 10 unidades de A, 5 de B y 3 de C. Determine en forma gráfica un plan de producción diario que minimice el costo de cumplir las demandas diarias de Leary Chemical.

4 Para cada una de las siguientes funciones, determine la dirección en la cual la función objetivo se incrementa:

a $z = 4x_1 - x_2$

b $z = -x_1 + 2x_2$

c $z = -x_1 - 3x_2$

5 Furnco fabrica escritorios y sillas. Cada escritorio utiliza cuatro unidades de madera y las sillas utilizan tres. Un escritorio contribuye con 40 dólares a la utilidad, y una silla contribuye con 25 dólares. Las restricciones del mercado requieren que la cantidad de sillas fabricada sea por lo menos el doble del número de escritorios producidos. Si se dispone de 20 unidades de madera, plantee un PL para maximizar la utilidad de Furnco. Luego resuelva en forma gráfica el PL.

6 Jane es dueña de una granja de 45 acres. En ellos va a sembrar trigo y maíz. Cada acre sembrado con trigo rinde 200 dólares de utilidad; cada acre sembrado con maíz proporciona 300 dólares de utilidad. La mano de obra y el fertilizante que se utiliza para cada acre, aparece en la tabla 1. Se dispone de 100 trabajadores y de 120 toneladas de fertilizante. Mediante programación lineal determine cómo Jane puede maximizar las utilidades.

TABLA 1

	Trigo	Maíz
Mano de obra	3 trabajadores	2 trabajadores
Fertilizante	2 t	4 t

3.3 Casos especiales

Los problemas de Giapetto y de Dorian tenían una solución óptima única. En esta sección se tratan tres tipos de PL que no tienen una solución óptima única.

1 Algunas PL tienen un número infinito de soluciones óptimas (*soluciones óptimas múltiples o alternativas*).

2 Algunas PL no tienen soluciones factibles (PL *no factible*).

3 Algunas PL son *no acotadas*: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (en problemas de maximización).

Soluciones óptimas múltiples o alternativas

EJEMPLO 3 Soluciones óptimas alternativas

Una compañía de automotores fabrica automóviles y camiones. Cada uno de los vehículos debe pasar por el taller de pintura y por el de ensamble. Si el taller de pintura pintara sólo camiones, entonces podría pintar 40 por día. Si el taller de pintura pintara sólo automóviles, entonces podría pintar 60 vehículos diarios. Si el taller de ensamble se destinara sólo a ensamblar automóviles, entonces podría procesar 50 al día, y si sólo produjera camiones, procesaría 50 por día. Cada camión contribuye con 300 dólares a la utilidad, y cada automóvil contribuye con 200 dólares. Mediante la PL, determine un programa de producción diaria que maximice las utilidades de la compañía.

Solución La compañía debe decidir cuántos automóviles y camiones debe producir por día. Esto lleva a definir las siguientes variables de decisión:

x_1 = número de camiones producidos por día

x_2 = número de automóviles producidos por día

La utilidad diaria de la compañía (en cientos de dólares) es $3x_1 + 2x_2$, así que la función objetivo de la empresa podría ser la siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 \tag{12}$$

Las dos restricciones de la compañía son:

Restricción 1 La fracción del día durante la cual el taller de pintura está ocupado, es menor o igual a 1.

Restricción 2 La fracción del día durante la cual el taller de ensamble está ocupado es menor o igual a 1.

Entonces,

$$\text{Fracción del día en que el taller de pintura trabaja con los camiones} = \left(\frac{\text{fracción del día}}{\text{camión}}\right)\left(\frac{\text{camiones}}{\text{día}}\right) = \tfrac{1}{40}x_1$$

$$\text{Fracción del día en que el taller de pintura trabaja con los automóviles} = \tfrac{1}{60}x_2$$

$$\text{Fracción del día en que el taller de ensamble trabaja con los camiones} = \tfrac{1}{50}x_1$$

$$\text{Fracción del día en que el taller de ensamble trabaja con los automóviles} = \tfrac{1}{50}x_2$$

Por lo tanto, la restricción 1 se podría expresar como sigue

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \qquad \text{(limitación del taller de pintura)} \tag{13}$$

y la restricción 2 sería

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \qquad \text{(limitación del taller de ensamble)} \tag{14}$$

Como $x_1 \ge 0$ y $x_2 \ge 0$ se debe cumplir, el PL pertinente es

$$\begin{aligned} &\max z = 3x_1 + 2x_2 && (12)\\ &\text{s.a} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 && (13)\\ &\qquad\ \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 && (14)\\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

La región factible para esta PL es la región sombreada en la figura 5 limitada por *AEDF*.[†]

Por lo que toca a la recta de isoutilidades, se escoge la recta que pasa por el punto (20, 0). Como (20, 0) tiene un valor z de $3(20) + 2(0) = 60$, entonces la recta de isoutilidades es $z = 3x_1 + 2x_2 = 60$. Cuando se examinan las rectas paralelas a esta recta de isoutilidades en la dirección en que z aumenta (noreste), se observa que el último "punto" en la región factible en que se cruza una recta de isoutilidades es *todo* el segmento de recta *AE*. Esto quiere decir que cualquier punto sobre el segmento de recta *AE* es óptimo. Es posible usar cualquier punto sobre *AE* para determinar el valor óptimo de z. Por ejemplo, el punto A, (40, 0), da $z = 3(40) = 120$.

En resumen, la PL de la compañía de automóviles tiene un número infinito de soluciones óptimas, es decir, tiene *soluciones múltiples* o *alternativas*. Esto lo indica el hecho de

[†] La restricción (13) la satisfacen todos los puntos sobre *AB* (*AB* es $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$), y (14) o abajo de la recta; y todos los puntos sobre *CD* (*CD* es $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 = 1$) o abajo de la recta satisfacen (14).

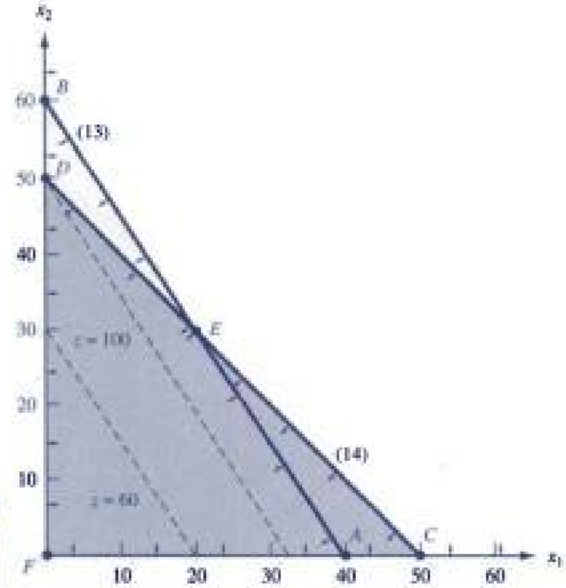


FIGURA 5
Solución gráfica del ejemplo 3

que a medida que una recta de isoutilidades deja la región factible, intersectará un segmento de recta completo que corresponde a la restricción activa (en este caso, AE).

A partir del ejemplo actual, parece razonable (y se puede demostrar que es cierto) que si dos puntos (A y E aquí) son óptimos, entonces *cualquier* punto en el segmento de recta que une estos dos puntos también lo es.

Si hay otra opción óptima, entonces quien toma las decisiones puede usar un criterio secundario para escoger entre las soluciones óptimas. Los administradores de la compañía de automóviles podrían preferir el punto A, porque simplificaría sus negocios (y hasta les permitiría maximizar las utilidades) porque podrían producir un solo tipo de producto (camiones).

La técnica de **programación por objetivos** (véase sección 4.14) se aplica con frecuencia para escoger entre varias soluciones óptimas alternas.

PL no factible

Es posible que una región factible de PL sea vacía (no contenga puntos), lo cual da como resultado un PL *no factible*. Como la solución óptima a un PL es el mejor punto en la región factible, una PL no factible no tiene soluciones óptimas.

EJEMPLO 4 PL no factible

Suponga que los vendedores de automóviles requieren que la compañía de automóviles del ejemplo 3 fabriquen por lo menos 30 camiones y 20 automóviles. Determine la solución óptima para el nuevo PL.

Solución Después de añadir las restricciónes $x_1 \geq 30$ y $x_2 \geq 20$ al ejemplo 3, se obtiene la siguiente PL:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1 \quad \textbf{(15)}$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1 \quad \textbf{(16)}$$

$$x_1 \qquad \geq 30 \quad \textbf{(17)}$$

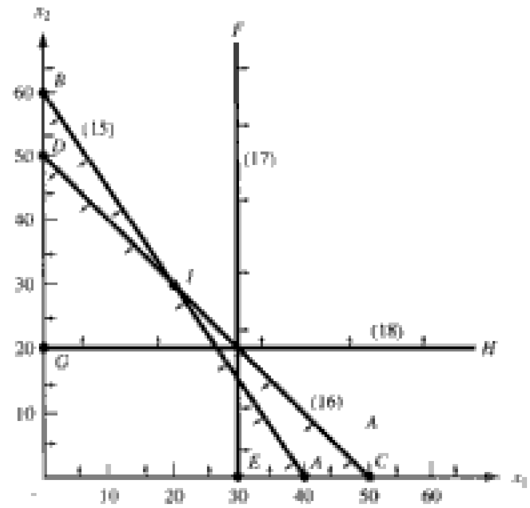


FIGURA 6
Región factible vacía (PL no factible)

$$x_2 \geq 20 \qquad \textbf{(18)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La gráfica de la región factible para esta PL es la de la figura 6.

Todos los puntos en AB (AB es $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$) o los que se encuentran abajo de AB cumplen la restricción (15).

Todos los puntos en CD (CD es $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 = 1$) o los que se encuentran abajo de CD, cumplen la restricción (16).

Todos los puntos en EF (EF es $x_1 = 30$) o los que están a la derecha de EF, cumplen la restricción (17).

Todos los puntos en GH (GH es $x_2 = 20$) o los que se encuentran arriba de AB, cumplen la restricción (18).

En la figura 6, es evidente que ningún punto satisface de la (15) a la (18). Esto significa que el ejemplo 4 tiene una región factible vacía y es un PL no factible.

El PL es no facfible en el ejemplo 4, porque producir 30 camiones y 20 automóviles requiere más tiempo en el taller de pintura del que está disponible.

PL no acotada

La siguiente PL especial es un PL *no acotada*. En un problema de maximización, una PL no acotada se presenta si es posible encontrar puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente grandes, lo cual va de acuerdo con un administrador que obtiene en forma arbitraria grandes ingresos o utilidades. Esto indica que no habría una solución óptima no acotada en una PL planteada en forma correcta. Por lo tanto, si usted resuelve una PL en la computadora y encuentra que la PL es no acotada, entonces es muy probable que haya cometido un error al formular la PL o al introducir los datos a la computadora.

Por lo que se refiere a un problema de minimización, una PL es no acotada si hay puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente pequeños. Al resolver en forma gráfica una PL, es posible detectar una PL no acotada de la siguiente manera: un problema de maximización es no acotado si, cuando usted se desplaza en forma paralela a la recta de isoutilidades original en la dirección en que se incrementa z, nunca deja por completo la región factible. Un problema de minimización es no acotado si nunca deja la región factible al moverse en la dirección en que decrece z.

EJEMPLO 5 PL no acotada

Resolver en forma gráfica la PL siguiente:

$$\max z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \quad (19)$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6 \quad (20)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución En la figura 7 se puede ver que todos los puntos en la recta AB (AB es la recta $x_1 - x_2 = 1$) o por arriba de ella satisfacen (19). Asimismo, todos los puntos en la recta CD (CD es $2x_1 + x_2 = 6$) o por arriba de ella satisfacen (20). Por consiguiente, la región factible para el ejemplo 5 es la región no acotada (sombreada de la figura 7, la cual está acotada sólo por el eje x_2, el segmento de recta DE y la parte de la recta AB que inicia en E. Para encontrar la solución óptima se traza la recta de isoutilidades que pase por (2, 0). Esta recta de isoutilidades tiene $z = 2x_1 - x_2 = 2(2) - 0 = 4$. La dirección en que se incrementa z es hacia el sureste (esto hace a x_1 mayor y a x_2 menor). Al desplazarse en forma paralela a $z = 2x_1 - x_2$ en dirección sureste, se observa que cualquier recta de isoutilidades que se trace, cruza la región factible. (La razón es que cualquier recta de isoutilidades tiene mayor pendiente que la recta $x_1 - x_2 = 1$.)

Por lo tanto, hay puntos en la región factible que tienen valores de z arbitrariamente grandes. Por ejemplo, si se desea encontrar un punto en la región factible que tuviera $z \geq 1\,000\,000$, se podría escoger cualquier punto en la región factible que esté al sureste de la recta de isoutilidades $z = 1\,000\,000$.

Luego del análisis de las últimas dos secciones, se puede ver que todas las PL con dos variables deben estar en uno de los siguientes cuatro casos:

Caso 1 El PL tiene solución óptima única.

Caso 2 El PL tiene soluciones óptimas alternativas: dos o más puntos extremos son óptimos y la PL tendrá un número infinito de soluciones óptimas.

Caso 3 El PL es no factible: la región factible no contiene puntos.

Caso 4 El PL es no acotada: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (problemas de maximización) o arbitrariamente pequeños (problemas de minimización).

En el capítulo 4 se demuestra que toda PL (no sólo las PL con dos variables) debe estar en cualesquiera de los cuatro casos.

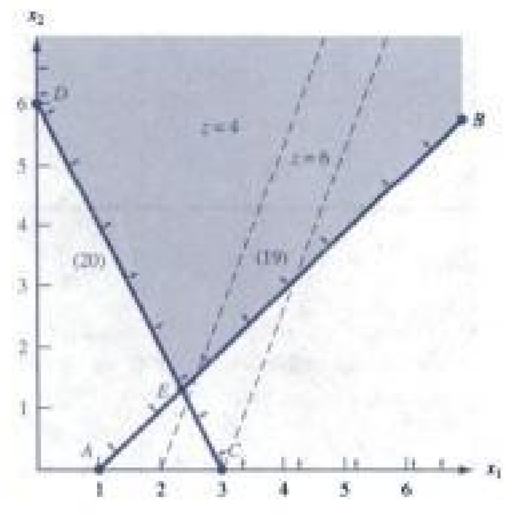


FIGURA 7
PL no acotada

En el resto del capítulo se guía al lector a través del planteamiento de varios modelos de programación lineal más complicados. El paso más importante en el planteamiento del modelo de PL, es la elección de las variables de decisión. Si éstas se escogen de modo apropiado, la función objetivo y las limitaciones se infieren sin mucha dificultad. El problema al determinar una función objetivo y las restricciónes de un PL es, por lo regular, el resultado de una elección incorrecta de las variables de decisión.

PROBLEMAS

Grupo A

Identifique cuál de los casos 1 a 4 se aplica a cada una de los siguientes PL:

1

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 8x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5 Verdadero o falso: para que un PL sea no acotado, la región factible del PL debe ser no acotada.

6 Verdadero o falso: todo PL con una región factible no acotada tiene una solución óptima no acotada.

7 Si la región factible de un PL no es no acotada, se dice que la región factible del PL es acotada. Suponga que un PL posee una región factible acotada. Explique por qué puede encontrar la solución óptima para el PL (sin una recta de isoutilidades o de isocostos) mediante la simple verificación de los valores z en cada punto extremo de la región factible. ¿Por qué podría fallar este método si la región factible del PL es no acotado?

8 Determine gráficamente todas las soluciones óptimas del siguiente PL:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_2 - x_1 &\ge 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

9 Encuentre en forma gráfica dos soluciones óptimas de la siguiente PL:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 &\ge 36 \\ 3x_1 + 5x_2 &\ge 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

10 Boris Milkem, el administrador de efectivo, negocia con moneda francesa (francos) y con moneda norteamericana (dólares). A la media noche compra francos y paga 0.25 dólares por franco, y dólares a tres francos por dólar. Sea x_1 = número de dólares comprados (pago en francos), y x_2 = número de francos comprados (pago en dólares). Suponga que ambos tipos de transacciones se efectúan en forma simultánea, y que la única limitación es que a las 12:01 a.m. Boris debe tener un número no negativo de francos y dólares.

- **a** Plantee un PL que le permita a Boris maximizar el número de dólares que tiene después de que todas las transacciones se completan.
- **b** Resuelva en forma gráfica el PL y explique su respuesta.

3.4 Un problema de dieta

Varios planteamientos de PL (como el ejemplo 2 y el siguiente problema relacionado con la dieta) surgen de situaciones en las cuales quien toma las decisiones desea minimizar el costo de cumplir con una serie de exigencias.

EJEMPLO 6 Problema relacionado con la dieta

Mi dieta requiere que todos los alimentos que ingiera pertenezcan a uno de los cuatro "grupos básicos de alimentos" (pastel de chocolate, helado de crema, bebidas carbonatadas y pastel de queso). Por ahora hay los siguientes cuatro alimentos: barras de chocolate, helado de crema de chocolate, bebida de cola y pastel de queso con piña. Cada barra de chocolate cuesta 50 centavos, cada bola de helado de crema de chocolate cuesta 20 centavos, cada botella de bebida de cola cuesta 30 centavos y cada rebanada de pastel de queso con piña cuesta 80 centavos. Todos los días debo ingerir por lo menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutricional por unidad de cada alimento se proporciona en la tabla 2. Plantee un modelo de programación lineal que se pueda utilizar para cumplir con mis necesidades nutricionales al mínimo costo.

Solución Como siempre, se empieza por establecer las decisiones que se deben tomar: cuánto de cada tipo de alimento se debe consumir por día. Por consiguiente, definimos las variables de decisión:

x_1 = cantidad de barras de chocolate consumida al día

x_2 = cantidad de bolas de helado de chocolate ingeridas al día

x_3 = botellas de bebida de cola tomadas por día

x_4 = rebanadas de pastel de queso con piña consumidas al día

Mi objetivo es minimizar el costo de mi dieta. El costo total de cualquier dieta se podría determinar a partir de la siguiente relación: (costo total de la dieta) = (costo de las barras de chocolate) + (costo del helado de crema) + (costo de la bebida de cola) + (costo del pastel de queso). Para evaluar el costo total de la dieta obsérvese que, por ejemplo,

$$\text{Costo de la bebida de cola} = \left(\frac{\text{costo}}{\text{botella de bebida de cola}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{botellas de bebida}\\ \text{de cola consumidas}\end{array}\right) = 30x_3$$

Al aplicar el mismo razonamiento a los otros tres alimentos, se tiene (en centavos)

$$\text{Costo total de la dieta} = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

Por lo tanto, la función objetivo es

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

Las variables de decisión deben satisfacer las cuatro restricciones siguientes:

Restricción 1 El consumo de calorías por día debe ser por lo menos de 500 calorías.

Restricción 2 El consumo diario de chocolate debe ser por lo menos de 6 onzas.

Restricción 3 La ingestión diaria de azúcar debe ser por lo menos de 10 onzas.

Restricción 4 El consumo diario de grasas debe ser de por lo menos 8 onzas.

TABLA 2
Valores nutricionales de la dieta

Tipo de alimento	Calorías	Chocolate (Onzas)	Azúcar (Onzas)	Grasa (Onzas)
Barra de chocolate	400	3	2	2
Helado de crema de chocolate (1 bola)	200	2	2	4
Bebida de cola (1 botella)	150	0	4	1
Pastel de queso con piña (1 rebanada)	500	0	4	5

Téngase en cuenta que (consumo diario de calorías) = (calorías en las barras de chocolate) + (calorías en el helado de chocolate) + (calorías en la bebida de cola) + (calorías en el pastel de queso con piña) para expresar la restricción 1 en términos de las variables de decisión.

Las calorías en las barras de chocolate consumidas se determinan a partir de

$$\text{Calorías en las barras de chocolate} = \left(\frac{\text{calorías}}{\text{barra de chocolate}}\right)\left(\begin{matrix}\text{barras de chocolate}\\ \text{consumidas}\end{matrix}\right) = 400x_1$$

Al aplicar un razonamiento similar a los otros tres alimentos se obtiene

$$\text{Consumo diario de calorías} = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4$$

La restricción 1 se expresa mediante

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 \quad \text{(Restricción de las calorías)} \quad \textbf{(21)}$$

La restricción 2 se expresa mediante

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad \text{(Restricción del chocolate)} \quad \textbf{(22)}$$

La restricción 3 se expresa mediante

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 \quad \text{(Restricción del azúcar)} \quad \textbf{(23)}$$

La restricción 4 se expresa mediante

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8 \quad \text{(Restricción de la grasa)} \quad \textbf{(24)}$$

Por último, se deben cumplir las restricciones de signo $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Al combinar la función objetivo, las restricciones (21) a (24) y las restricciones de signo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{llr}
\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 & & \\
\text{s.a} \quad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 & \text{(Restricción de las calorías)} & \textbf{(21)} \\
\qquad 3x_1 + \quad 2x_2 \qquad\qquad\qquad \geq 6 & \text{(Restricción del chocolate)} & \textbf{(22)} \\
\qquad 2x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 + \quad 4x_4 \geq 10 & \text{(Restricción del azúcar)} & \textbf{(23)} \\
\qquad 2x_1 + \quad 4x_2 + \quad x_3 + \quad 5x_4 \geq 8 & \text{(Restricción de la grasa)} & \textbf{(24)} \\
\qquad\qquad x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) & \text{(Restricciones de signo)} &
\end{array}$$

La solución óptima para este PL es $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $z = 90$. Por lo tanto, la dieta de costo mínimo cuesta al día 90 centavos si se consumen tres bolas de helado de crema de chocolate y se toma una botella de bebida de cola. El valor óptimo de z se obtiene al sustituir el valor óptimo de las variables de decisión en la función objetivo. Así se obtiene un costo total de $z = 3(20) + 1(30) = 90$ centavos. La dieta óptima proporciona

$$\begin{aligned}
200(3) + 150(1) &= 750 \text{ calorías} \\
2(3) &= 6 \text{ onzas de chocolate} \\
2(3) + 4(1) &= 10 \text{ onzas de azúcar} \\
4(3) + 1(1) &= 13 \text{ onzas de grasa}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, las restricciones del chocolate y el azúcar son activas, pero las restricciones de calorías y grasa son inactivas.

Una versión del problema de la dieta con una lista de alimentos y cantidades necesarias nutricionales más reales, fue una de las primeros PL que se resolvió mediante computadora. Stigler (1945) propuso un problema relacionado con la dieta, en el cual había 77 tipos de alimentos y se tenían que cumplir 10 requisitos nutricionales (vitamina A, vitamina C, entre otros). La solución óptima que dio la computadora consistía en harina de maíz, harina de trigo, leche evaporada, crema de cacahuate, grasa de cerdo, carne de res, hígado, papas, espinacas y col. Si bien esta dieta contiene evidentemente un alto grado de nutrientes vitales, pocas personas se mostrarían satisfechas con ella, porque no parece cumplir los estándares mínimos de sabor (y Stigler exigía que se comiera lo mismo todos los días). La solución óptima de cualquier modelo de PL refleja sólo los aspectos de realidad que capta la función objetivo y las limitaciones. El planteamiento de Stigler (y el nuestro) del problema de la dieta no reflejó el deseo de las personas por una dieta sabrosa y variada. La programación por enteros se utiliza para planear los menús de ciertas instituciones para una semana o un mes.[†] Los modelos para la planeación de menús sí consideran limitaciones que reflejan el sabor y la variedad.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Hay tres fábricas a las orillas del río Momiss (1, 2 y 3). Cada una vierte dos tipos de contaminantes (1 y 2) al río. Si se procesaran los desechos de cada una de las fábricas, entonces se reduciría la contaminación del río. Cuesta 15 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 1, y cada tonelada procesada reduce la cantidad de contaminante 1 en 0.10 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.45 toneladas. Cuesta 10 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 2, y cada tonelada procesada reduciría la cantidad del contaminante 1 en 0.20 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.25 toneladas. Cuesta 20 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 3, y cada tonelada procesada reduciría la cantidad del contaminante 1 en 0.40 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.30 toneladas. El Estado desea reducir la cantidad del contaminante 1 por lo menos en 30 toneladas y la cantidad del contaminante 2 en por lo menos 40 toneladas en el río. Plantee una PL que minimice el costo de disminuir la contaminación en las cantidades deseadas. ¿Opina que las suposiciones del PL (Proporcionalidad, Aditividad, Divisibilidad y Certidumbre) son razonables para este problema?

2[‡] U.S. Labs fabrica válvulas mecánicas para el corazón a partir de válvulas del corazón de cerdos. Se requieren válvulas de distintas dimensiones en diferentes operaciones del corazón. U.S Labs compra válvulas de cerdo a tres proveedores distintos. El costo y la combinación de las válvulas compradas a cada proveedor se muestran en la tabla 3. Cada mes, U.S. Labs hace un pedido a cada proveedor. Se deben comprar todos los meses por lo menos 500 válvulas grandes, 300 medianas y 300 pequeñas. Debido a la disponibilidad limitada de las válvulas de cerdo, se compran cuando mucho 700 válvulas por mes a cada proveedor. Formule una PL con la que se puedan minimizar los costos de adquisición de las válvulas necesarias.

TABLA 3

Proveedor	Costo por válvula ($)	% de las grandes	% de las medianas	% de las pequeñas
1	5	40	40	20
2	4	30	35	35
3	3	20	20	60

3 Peg y Al Fundy tienen un presupuesto limitado para alimentos, por lo que Peg está tratando de alimentar a la familia con el menor dinero posible. Pero quiere tener la certeza de que los miembros de la familia obtienen las cantidades necesarias de nutrientes. Peg puede comprar dos alimentos. El alimento 1 cuesta 7 dólares la libra y cada libra contiene tres unidades de vitamina A y una unidad de vitamina C. El alimento 2 cuesta un dólar por libra, y cada libra contiene una unidad de cada vitamina. La familia requiere todos los días por lo menos 12 unidades de vitamina A y seis unidades de vitamina C.

a Compruebe que si Peg compra diario 12 unidades del alimento 2, entonces excederá la cantidad necesaria de vitamina C en 6 unidades.

b Al se mostró firme y demandó que Peg cumpla exactamente con las cantidades de nutrientes necesarios al día con el fin de consumir precisamente 12 unidades de vitamina A y 6 unidades de vitamina C. La solución óptima al nuevo problema requiere que se ingiera menos vitamina C, pero resultará más cara. ¿Por qué?

4 Ricitos de Oro necesita encontrar por lo menos 12 lb de oro y al menos 18 lb de plata para pagar la renta mensual. Hay dos minas en las cuales Ricitos de Oro puede encontrar oro y plata. Cada día que Ricitos de Oro pasa en la mina 1 encuentra 2 lb de oro y 2 lb de plata. Cada día que Ricitos de Oro pasa en la mina 2 encuentra 1 lb de oro y 3 lb de plata. Plantee un PL que ayude a Ricitos de Oro a cumplir con sus requerimientos pasando el menor tiempo posible en las minas. Resuelva gráficamente el PL.

[†] Balintfy (1976).
[‡] Basado en Hilal y Erickson (1981).

3.5 Un problema de horarios de trabajo

En muchas aplicaciones de programación lineal se requiere determinar el método de costo mínimo para satisfacer las exigencias de fuerza de trabajo. Mediante el ejemplo siguiente se ilustran las características básicas y comunes en muchas de dichas aplicaciones.

EJEMPLO 7 Problema de la oficina de correos

Una oficina de correos requiere distintas cantidades de empleados de tiempo completo en diferentes días de la semana. La cantidad de empleados de tiempo completo que se requiere cada día, se da en la tabla 4. Las reglas del sindicato establecen que cada empleado de tiempo completo debe trabajar cinco días consecutivos y descansar dos días. Por ejemplo, un empleado que trabaja de lunes a viernes, debe descansar sábado y domingo. La oficina de correos quiere cumplir con sus exigencias diarias sólo por medio de empleados de tiempo completo. Plantee un PL que la oficina de correos pueda utilizar para minimizar la cantidad de empleados de tiempo completo que tengan que ser contratados.

Solución Antes de ofrecer el planteamiento correcto de este problema, analicemos una solución *incorrecta*. Muchos estudiantes empiezan por definir x_i como el número de empleados que trabajan en el día i (día 1 = lunes, día 2 = martes, etcétera). Su razonamiento es que (número de empleados de tiempo completo) = (número de empleados que trabajan el lunes) + (número de empleados que trabajan el martes) + ⋯ + (número de empleados que trabajan el domingo). Este razonamiento origina la función objetivo siguiente:

$$\min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7$$

Para tener la seguridad de que en la oficina postal están trabajando suficientes empleados de tiempo completo todos los días, suman las restricciones $x_i \geq$ (número de empleados requeridos en el día i). Por ejemplo, para el lunes añaden la restricción $x_1 \geq 17$. Al agregar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ se obtiene el PL siguiente

$$\begin{aligned}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \\
\text{s.a} \quad x_1 & \geq 17 \\
x_2 & \geq 13 \\
x_3 & \geq 15 \\
x_4 & \geq 19 \\
x_5 & \geq 14 \\
x_6 & \geq 16 \\
x_7 & \geq 11 \\
x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)
\end{aligned}$$

Por lo menos hay dos errores en este planteamiento. Primero, la función objetivo *no* es el número de empleados postales de tiempo completo. La función objetivo actual cuenta a cada empleado cinco veces, no una. Por ejemplo, cada empleado que empieza a trabajar el lunes, labora de lunes a viernes, y está incluido en x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5. Segundo, las variables $x_1, x_2, \ldots, x_7$ están interrelacionadas, y la interrelación entre las variables no se refleja en el conjunto actual de restricciones. Por ejemplo, algunas de las personas que trabajan el lunes (las personas x_1) estarán laborando el martes. Esto significa que x_1 y x_2 están interrelacionadas, pero las restricciones no señalan que el valor de x_1 tenga efecto alguno en el valor de x_2.

La clave para plantear en forma correcta este problema, es darse cuenta de que la decisión fundamental de la oficina de correos no es cuántas personas trabajan cada día, sino más bien cuántas personas *empiezan* a trabajar cada día de la semana. Tomando en cuenta lo anterior, se define:

TABLA 4
Exigencias de la oficina de correos

Día	Número de empleados de tiempo completo que se necesitan
1 = Lunes	17
2 = Martes	13
3 = Miércoles	15
4 = Jueves	19
5 = Viernes	14
6 = Sábado	16
7 = Domingo	11

$$x_i = \text{número de empleados que empiezan a trabajar el día } i$$

Por ejemplo, x_1 es la cantidad de personas que empiezan a trabajar el lunes (estas personas laboran de lunes a viernes). Cuando ya están definidas correctamente las variables, es fácil determinar la función objetivo adecuada, así como las limitaciones. Para determinar la función objetivo, obsérvese que (número de empleados de tiempo completo) = (número de empleados que empiezan a trabajar el lunes) + (número de empleados que empiezan a trabajar el martes) +···+ (número de empleados que empiezan a trabajar el domingo). Como cada empleado empieza a trabajar exactamente un día de la semana, esta expresión no cuenta dos veces a los empleados. Por consiguiente, cuando se definen en forma correcta las variables, la función objetivo es

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

La oficina de correos tiene que asegurarse que están trabajando suficientes empleados cada día de la semana. Por ejemplo, por lo menos 17 empleados deben estar laborando el lunes. ¿Quién está trabajando el lunes? Todos excepto los empleados que empezaron a trabajar el martes o el miércoles (estas personas descansan respectivamente domingo y lunes, y lunes y martes). Esto quiere decir que el número de empleados que laboran el lunes es $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Con el fin de tener la certeza que por lo menos 17 empleados están laborando el lunes, se requiere que se cumpla la limitación

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$$

Luego de establecer limitaciones similares para los otros seis días de la semana y las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ se obtiene el planteamiento siguiente para el problema de la oficina de correos:

$$\begin{array}{lll}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 & & \text{(restricción del lunes)} \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 & & \text{(restricción del martes)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 & & \text{(restricción del miércoles)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 & & \text{(restricción del jueves)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 & & \text{(restricción del viernes)} \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 & & \text{(restricción del sábado)} \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 & & \text{(restricción del domingo)} \\
x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) & & \text{(restricciones de signo)}
\end{array}$$

La solución óptima para este PL es $z = \frac{67}{3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{22}{3}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{10}{3}$, $x_7 = 5$. Como sólo se permiten trabajadores de tiempo completo, las variables deben ser números enteros, por lo que no se cumple la Suposición de divisibilidad. Para hallar una respuesta razonable en la cual todas las variables sean enteros, se intenta redondear las variables fraccionarias al valor superior, lo cual genera la solución factible $z = 25$, $x_1 = 2$,

$x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 5$. Esto deja ver que la programación por enteros se puede usar para demostrar que una solución óptima para el problema de la oficina postal es $z = 23, x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 3$. Obsérvese que no hay modo de que la solución de la programación lineal óptima se pueda redondear para obtener la solución óptima sólo con enteros.

Baker (1974) desarrolló una técnica efectiva (en la que no se utiliza la programación lineal) para determinar el mínimo de empleados necesarios cuando cada trabajador tiene dos días seguidos de descanso.

Si usted resuelve este problema mediante LINDO, LINGO o el Solver para Excel, podría llegar a un horario distinto cuando trabajan 23 empleados. Esto demuestra que el ejemplo 7 tiene soluciones óptimas alternativas.

Elaboración de horario imparcial para los empleados

La solución óptima encontrada requiere 4 trabajadores que empiecen el lunes, 4 el martes, 2 el miércoles, 6 el jueves, 4 el sábado y 3 el domingo. Los empleados que empiezan el sábado estarán poco contentos, porque nunca tendrán un fin de semana libre. Si se rotan los horarios de los empleados después de un periodo de 23 semanas, se obtiene un horario más justo. Para ver cómo se logra, considere el siguiente horario:

- semanas 1 a 4: empieza en lunes
- semanas 5 a 8: empieza en martes
- semanas 9 a 10: empieza en miércoles
- semanas 11 a 16: empieza en jueves
- semanas 17 a 20: empieza en sábado
- semanas 21 a 23: empieza en domingo

El empleado 1 sigue su horario durante un periodo de 23 semanas. El empleado 2 inicia con la semana 2 de su horario (empieza el lunes durante 3 semanas, luego el martes durante 4 semanas y termina con 3 semanas que empiezan el domingo y una semana en lunes). Se continúa con este modelo para generar un horario de 23 semanas para cada empleado. Por ejemplo, el empleado 13 tiene el siguiente horario

- semanas 1 a 4: empieza en jueves
- semanas 5 a 8: empieza en sábado
- semanas 9 a 11: empieza en domingo
- semanas 12 a 15: empieza en lunes
- semanas 16 a 19: empieza en martes
- semanas 20 a 21: empieza en miércoles
- semanas 22 a 23 empieza el jueves

Este método para calendarizar el trabajo trata igual a todos los empleados.

Aspectos de los modelos

1 Este ejemplo es un **problema estático de horarios**, porque se supone que la oficina de correos maneja el mismo horario cada semana. En realidad, las demandas cambian a lo largo del tiempo, los trabajadores toman vacaciones en el verano, etcétera, así que la oficina no enfrenta la misma situación cada semana. Un **problema dinámico de horarios** se analiza en la sección 3.12.

2 Si usted quisiera determinar un modelo para un horario semanal que funcionara en un supermercado o un restaurante de bocadillos, la cantidad de variables podría ser muy grande y la computadora podría tener dificultades para establecer una solución exacta. En este caso se usa el **método heurístico** para encontrar una buena solución al problema. Refiérase a Love y Hoey (1990), donde encontrará un ejemplo de horarios para un restaurante de bocadillos.

3 Nuestro modelo se puede ampliar con toda facilidad para manejar empleados de medio tiempo, el uso de tiempo extra y funciones objetivo opcionales como maximizar el número de días de fin de semana libres. (Véanse problemas 1, 3 y 4.)

4 ¿Cómo se determinó el número de empleados necesarios para cada día? Quizá la oficina de correos quiere tener suficientes empleados para asegurarse que 95% de todas las cartas se clasifiquen en una hora. Para determinar la cantidad de empleados necesarios para proporcionar un servicio adecuado, la oficina de correos podría utilizar la teoría de colas, la cual se trata en *Modelos estocásticos en la investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos*; y pronósticos en el capítulo 14 de este libro.

Aplicaciones en la vida cotidiana

Krajewski, Ritzman y McKenzie (1980), con la ayuda de la PL, crearon un horario para los empleados que elaboraban cheques en el Ohio National Bank. Su modelo estableció la combinación de costo mínimo de empleados de medio tiempo, empleados de tiempo completo y tiempo extra necesaria para procesar los cheques diarios hacia el final del día de trabajo (10 p.m.). El dato principal de su modelo era un pronóstico del número de cheques que llegarían al banco cada hora. Este pronóstico se obtuvo por medio de regresión múltiple (véase *Modelos estocásticos en la investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos).* El principal resultado de la PL fue un horario de trabajo. Por ejemplo, la PL recomendaba que dos empleados de tiempo completo trabajaran diariamente de 11 a.m. a 8 p.m., 33 empleados de medio tiempo trabajarían diario de 6 p.m. a 10 p.m. y 27 trabajadores de medio tiempo laborarían de 6 p.m. a 10 p.m. lunes, martes y viernes.

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el ejemplo de la oficina de correos, suponga que cada empleado de tiempo completo trabaja 8 horas al día. Entonces, las demandas del lunes de 17 trabajadores se podrían considerar como $8(17) = 136$ horas. La oficina de correos podría cumplir su demanda diaria de mano de obra empleando tanto trabajadores de tiempo completo como de medio tiempo. Durante cada semana, un empleado de tiempo completo trabaja 8 horas diarias durante cinco días consecutivos, en tanto que un empleado de medio tiempo trabaja 4 horas al día durante cinco días consecutivos. Un empleado de tiempo completo representa un costo de 15 dólares por hora a la oficina de correos, en tanto que un empleado de medio tiempo (con prestaciones salariales reducidas) cuesta 10 dólares por hora a la oficina de correos. Las reglas del sindicato limitan el trabajo de medio tiempo a 25% de la mano de obra necesaria a la semana. Plantee un PL que minimice los costos de la oficina de correos en mano de obra a la semana.

2 Durante cada periodo de cuatro horas, la policía de Pueblo Chico necesita la siguiente cantidad de oficiales de policía en servicio: de las 12 de la noche a 4 a.m., 8; de 4 a 8 a.m., 7; de 8 a.m. a 12 del día, 6; de 12 a 4 p.m., 6; de 4 a 8 p.m., 5; de 8 p.m. a medianoche, 4. Cada oficial de policía trabaja dos turnos consecutivos de 4 horas. Plantee un PL que sea útil para minimizar el número de policías necesarios para cumplir con las demandas diarias de Pueblo Chico.

Grupo B

3 Suponga que la oficina de correos tiene la capacidad de forzar a los empleados a trabajar un día de tiempo extra cada semana. Por ejemplo, un empleado cuyo turno regular es de lunes a viernes, tendría que trabajar un sábado. Cada empleado recibe como pago 50 dólares por día en los primeros cinco días trabajados durante una semana y 62 dólares por el día extra (en caso de trabajarlo). Plantee un PL cuya solución posibilite a la oficina de correos minimizar el costo de cumplir con sus demandas de trabajo a la semana.

4 Suponga que la oficina de correos cuenta con 25 empleados de tiempo completo y no tiene permitido contratar o despedir empleados. Formule un PL que se pueda usar para establecer un horario para los empleados con objeto de maximizar el número de días de fin de semana libres que disfruten los empleados.

5 Todos los días, los trabajadores del Departamento de policía de Gotham City trabajan dos turnos de 6 horas que pueden estar entre las 12 de la noche a 6 a.m., de 6 a.m. a 12 p.m., de 12 p.m. a 6 p.m. y de 6 p.m. a media noche. Se requiere la siguiente cantidad de trabajadores en cada turno: de las 12 de la noche a 6 a.m., 15 personas; de 6 a.m. a 12 p.m., 5 empleados; de 12 p.m. a 6 p.m., 12 trabajadores; de 6 p.m. a 12 a.m., 6 personas. Los trabajadores cuyos turnos sean consecutivos reciben 12 dólares por hora, pero los que no tienen turnos consecutivos reciben 18 dólares por hora. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo de cumplir con las demandas diarias del Departamento de policía de Gotham City.

6 El Departamento de policía de Bloomington necesita por lo menos la cantidad de policías que se indica en la tabla 5 durante cada periodo de 6 horas del día. Se puede contratar a los policías para que trabajen 12 o 18 horas consecutivas. Los policías reciben 4 dólares por hora por cada una de las primeras 12 horas del día que trabajan, y cobran 6 dólares por hora por cada una de las siguientes 6 horas que trabajan en un día. Formule un PL que se utilice para minimizar los costos por cumplir con las necesidades diarias de policías en Bloomington.

TABLA 5

Periodo	Número necesario de policías
12 a.m.–6 a.m.	12
6 a.m.–12 p.m.	8
12 p.m.–6 p.m.	6
6 p.m.–12 a.m.	15

7 Cada hora, desde las 10 a.m. hasta las 7 p.m., el Bank One recibe cheques y debe procesarlos. Su objetivo es procesar todos los cheques el mismo día en que los recibe. El banco tiene 13 máquinas procesadoras de cheques, cada una de las cuales tiene la capacidad de procesar hasta 500 cheques por hora. Se requiere un trabajador que opere cada máquina. El Bank One contrata empleados de tiempo completo y de medio tiempo. Los trabajadores de tiempo completo trabajan de 10 a.m. a 6 p.m., de 11 a.m. a 7 p.m. o de medio día a 8 p.m., y cobran 160 dólares diarios. Los empleados de medio tiempo trabajan de 2 p.m. a 7 p.m., o de 3 p.m. a 8 p.m., y se les paga a 75 dólares el día. El número de cheques que se recibe en una hora se presenta en el tabla 6. Como al Bank One le interesa conservar la continuidad, opina que debe tener por lo menos tres trabajadores de tiempo completo bajo contrato. Desarrolle un horario de trabajo de costo mínimo que tenga procesados todos los cheques a las 8 p.m.

TABLA 6

Hora	Cheques recibidos
10 a.m.	5 000
11 a.m.	4 000
Medio día	3 000
1 p.m.	4 000
2 p.m.	2 500
3 p.m.	3 000
4 p.m.	4 000
5 p.m.	4 500
6 p.m.	3 500
7 p.m.	3 000

3.6 Un problema de presupuesto de gastos de capital

El tema de cómo la programación lineal se puede usar para determinar decisiones financieras óptimas se analiza en esta sección (y en la secciones 3.7 y 3.11). En esta sección, se plantea un modelo sencillo de gastos de capital.†

Primero se explica brevemente el concepto de valor neto actual (VNA), el cual se puede utilizar para comparar la conveniencia de diferentes inversiones. El tiempo 0 es el presente o actual.

Suponga que la inversión 1 requiere un desembolso de efectivo de 10 000 dólares en el tiempo 0 y un desembolso de efectivo de 14 000 dólares dentro de dos años a partir de ahora, y genera un flujo de efectivo de 24 000 dólares dentro de un año a partir de ahora. La inversión 2 requiere un desembolso de efectivo de 6 000 dólares en el tiempo 0, y un desembolso de efectivo de 1 000 dentro de dos años a partir de ahora; genera un flujo de efectivo de 8 000 un año después a partir de ahora. ¿Cuál inversión preferiría usted?

La inversión 1 tiene un flujo de efectivo neto de

$$-10\,000 + 24\,000 - 14\,000 = 0 \text{ dólares}$$

y la inversión 2 tiene un flujo de efectivo neto de

$$-6\,000 + 8\,000 - 1\,000 = 1\,000 \text{ dólares}$$

Con base en el flujo de efectivo neto, la inversión 2 es superior a la inversión 1. Cuando se comparan las inversiones según el flujo de efectivo neto se supone que un dólar recibido

†Esa sección se basa en Weingartner (1963).

en cualquier punto del tiempo tiene el mismo valor. ¡Pero esto no es cierto! Supóngase que existe una inversión (tal como un fondo del mercado monetario) para el cual un dólar invertido en un tiempo dado tendrá un rendimiento (con certeza) $(1 + r)$ dólares un año después. *Tasa de interés anual* es el nombre que recibe r. Como 1 dólar de ahora se transforma en $(1 + r)$ dólares un año después a partir de ahora se puede escribir

$$1 \text{ dólar actual} = (1 + r) \text{ dólares dentro de un año a partir de ahora}$$

Al aplicar el mismo razonamiento a los $(1 + r)$ dólares obtenidos dentro de un año a partir de ahora, se tiene que

$$1 \text{ dólar actual} = (1 + r) \text{ dólares en un año a partir de ahora} = (1 + r)^2 \text{ dólares en dos años a partir de ahora}$$

y

$$1 \text{ dólar actual} = (1 + r)^k \text{ dólares de } k \text{ años a partir de ahora}$$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad entre $(1 + r)^k$ se obtiene

$$1 \text{ dólar recibido } k \text{ años a partir de ahora} = (1 + r)^{-k} \text{ dólares actuales}$$

En otras palabras, un dólar recibido k años después a partir de ahora equivale a recibir $(1 + r)^{-k}$ dólares ahora.

Se puede usar esta idea para expresar todos los flujos de efectivo en términos de dólares en el tiempo 0 (este proceso se llama *flujos de efectivo de descuento en el tiempo* 0). Mediante el descuento es posible determinar el valor total (dólares en el tiempo 0) de los flujos de efectivo para cualquier inversión. El valor total (en dólares en el tiempo 0) de los flujos de efectivo para cualquier inversión se denomina **valor neto actual, VNA**, de la inversión. El VNA de una inversión es la cantidad con la cual la inversión incrementará el valor de la compañía (según se expresa en dólares en el tiempo 0).

Es posible calcular el VNA para las inversiones 1 y 2, suponiendo que $r = 0.20$.

$$\begin{aligned}\text{VNA de la inversión } 1 &= -10\,000 + \frac{24\,000}{1 + 0.20} - \frac{14\,000}{(1 + 0.20)^2}\\ &= \$277.78\end{aligned}$$

Lo anterior quiere decir que, si una firma proporciona la inversión 1, entonces el valor de la firma (en dólares en el tiempo 0) se incrementaría en 277.78 dólares. En cuanto a la inversión 2,

$$\begin{aligned}\text{VNA de la inversión } 2 &= -6\,000 + \frac{8\,000}{1 + 0.20} - \frac{1000}{(1 + 0.20)^2}\\ &= -\$27.78\end{aligned}$$

Si una compañía proporciona la inversión 2, entonces el valor de la empresa (en dólares en el tiempo 0) disminuiría en 27.78 dólares.

Por consiguiente, el concepto de VNA establece que la inversión 1 es superior que la inversión 2. Esta conclusión es contraria a la que se llegó al comparar los flujos de efectivo netos de las dos inversiones. Obsérvese que la comparación entre inversiones depende a menudo del valor de r. Por ejemplo, se le pide al lector en el problema 1 al final de esta sección que demuestre que para $r = 0.02$, la inversión 2 tiene un VNA que es superior al de la inversión 1. Naturalmente, en este análisis se supone que los flujos de efectivo futuros de una inversión se conocen con toda certeza.

Cálculo de VNA mediante Excel

Si recibimos un flujo de efectivo de c_t en t años a partir de ahora ($t = 1, 2, \ldots T$), y descontamos los flujos de efectivo a una tasa r, entonces el VNA de los flujos de efectivo está dado por

$$\sum_{t=1}^{t=T} \frac{c_t}{(1 + r)^t}$$

La idea básica es que 1 dólar de hoy es igual a $(1 + r)$ dólares en un año a partir de ahora, entonces

$$\frac{1}{1+r} \text{ hoy} = 1 \text{ dólar dentro de un año a partir de ahora}$$

La función de Excel = VNA facilita este cálculo. La fórmula es

$$= \text{VNA } (r, \text{ intervalo de flujos de efectivo})$$

La fórmula supone que los flujos de efectivo se presentan al final del año.

Los proyectos con VNA > 0 suman valor a la compañía, en tanto que proyectos con VNA negativo disminuyen el valor de la compañía.

NPV.xls

A continuación se ilustra el cálculo de VNA en el archivo NPV.xls.

EJEMPLO 8 Cálculo de VNA

Analice un proyecto con los flujos de efectivo que se proporcionan en la figura 8 para una tasa de descuento de 15 porciento.

a Calcule el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan al final del año.

b Determine el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan al principio del año.

c Calcule el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan a mitad del año.

Solución **a** Se introduce en la celda C7 la fórmula

$$= \text{NVA(C1,C4:I4)}$$

y se obtiene 375.06 dólares.

b Como todos los flujos de efectivo se reciben un año más pronto, se multiplica cada valor del flujo de efectivo por $(1 + 1.15)$; entonces, la respuesta se obtiene en C8 con la fórmula

$$= (1 + \text{C1}) \cdot \text{C7}$$

VNA es ahora mayor: 431.32 dólares.

Se comprueba en la celda D8 con la fórmula

$$= \text{C4} + \text{NPV(C1,D4:I4)}$$

c Como todos los flujos de efectivo se reciben seis meses antes, se multiplica cada valor del flujo de efectivo por $\sqrt{1.15}$. El VNA se determina en C9 con la fórmula

$$= (1.15)\text{^}0.5 \cdot \text{C7}$$

Ahora VNA es 402.21 dólares.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		td	0.15						
2									
3		Tiempo	1	2	3	4	5	6	7
4			-400	200	600	-900	1000	250	230
5									
6									
7	final de año	final del año	$375.06						
8	principio del año	inicio del año	$431.32	$431.32					
9	mitad del año	mitad del año	$402.21						

FIGURA 8

Función XNpv

Los flujos de efectivo se presentan con frecuencia a intervalos irregulares. Esto dificulta el cálculo de VNA de estos flujos de efectivo. Por fortuna, la función de Excel XNpv calcula en un abrir y cerrar de ojos los VNA de flujos de efectivo irregulares. Para usar la función XNpv, debe añadir primero las herramientas de análisis. Para hacerlo, seleccione Herramientas Complementos, y marque los cuadros de Herramientas de análisis y Herramientas de análisis VBA. Aquí se presenta un ejemplo de XNpv en acción.

EJEMPLO 9 Encontrar VNA de flujos de efectivo no periódicos

Suponga que el 8 de abril de 2001 pagó 900 dólares. Luego recibió

- 300 en 8/15/01
- 400 en 1/15/02
- 200 en 6/25/02
- 100 en 7/03/03.

Si la tasa de descuento anual es de 10%, ¿cuál es el VNA de estos flujos de efectivo?

Solución Se introducen los datos (en el formato de fechas de Excel) en D3:D7 y el flujo de efectivo en E3:E7 (véase figura. 9). Al escribir la fórmula

= XNPV(A9,E3:E7,D3:D7)

en la celda D11 aparece el VNA del proyecto en términos de dólares del 8 de abril de 2001 porque es la primera fecha cronológicamente. Lo que Excel hace es como sigue:

1 Calcula el número de años después del 8 de abril de 2001, en que se presentó cada fecha. (Se hizo en la columna F.) Por ejemplo, 15 de agosto de 2001 es 0.3534 de año después del 8 de abril.

2 Luego descuenta los flujos del efectivo a una tasa $\left(\frac{1}{1+\text{tasa}}\right)^{\text{años después}}$. Por ejemplo, el 15 de agosto de 2001, el flujo de efectivo es descontado en $\left(\frac{1}{1+.1}\right)^{0.3534} = 0.967$.

3 Se obtuvieron los datos de Excel en series de números al cambiar el formato a General.

Si usted desea que la función XNpv determine el VNA de un proyecto en dólares actuales, inserte un flujo de efectivo de 0 dólares en los datos actuales, e incluya este renglón en el cálculo de XNpv. Excel entregará el VNA del proyecto como de fecha de hoy.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Función XNpv		Código	Fecha	Flujo de efectivo	Tiempo	fd
3			36989.00	4/8/01	-900		1
4			37118.00	8/15/01	300	0.353425	0.966876
5			37271.00	1/15/02	400	0.772603	0.929009
6			37432.00	6/25/02	200	1.213699	0.890762
7			37805.00	7/3/03	100	2.235616	0.808094
8	Tasa						
9	0.1						
10				XNpv	Directo		
11				20.62822	20.628217		
12							
13				XIrr			
14				12.97%			

FIGURA 9
Ejemplo de la función XNpv

Con esta información básica, estamos listos para explicar cómo la programación lineal se puede aplicar a problemas en los cuales los fondos de inversión limitados se deben asignar a proyectos de inversión. Tales problemas de llaman problemas de **presupuesto de gastos de capital blancas.**

EJEMPLO 10 Selección de proyecto

La compañía Star Oil sometió a consideración cinco oportunidades de inversión diferentes. Las salidas de efectivo y los valores netos actuales (en millones de dólares) se proporcionan en la tabla 7. La Star Oil tiene 40 millones de dólares dispuestos para invertirlos ahora (tiempo 0). Se estima que en un año a partir de ahora (tiempo 1) habrá 20 millones de dólares disponibles para invertirlos. Star Oil podría comprar alguna fracción de cada inversión. En este caso, las salidas de efectivo y el VNA se ajustan en forma correspondiente. Por ejemplo, si Star Oil compra un quinto de la inversión 3, entonces se requeriría una salida de efectivo de $\frac{1}{5}(5) = 1$ millón de dólares en el tiempo 0, y una salida de efectivo de $\frac{1}{5}(5) = 1$ millón de dólares se requeriría en el tiempo 1. La participación de un quinto de la inversión 3 rendiría un VNA de $\frac{1}{5}(16) = 3.2$ millones de dólares. Star Oil desea maximizar el VNA que se puede obtener al participar en las inversiones 1 a 5. Plantee un PL que ayude a lograr este objetivo. Suponga que cualquier fondo sobrante en el tiempo 0 no se puede usar en el tiempo 1.

Solución Star Oil debe determinar qué fracción de cada inversión comprar. Entonces, se define

$$x_i = \text{ fracción de inversión } i \text{ comprada por Star Oil} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

El objetivo de Star es maximizar el VNA ganado con las inversiones. Entonces (VNA total) = (VNA ganado con la inversión 1) + (VNA ganado con la inversión 2) + ⋯ + (VNA ganado con la inversión 5). Obsérvese que

$$\begin{aligned}\text{VNA de la inversión } 1 &= (\text{VNA de la inversión } 1)\,(\text{fracción comprada de la inversión } 1)\\ &= 13x_1\end{aligned}$$

Si se aplica un razonamiento análogo a las inversiones 2 a 5 se sabe que Star Oil desea maximizar

$$z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 \tag{25}$$

Las restricciones de Star Oil se podrían expresar como sigue:

Restricción 1 Star no puede invertir más de 40 millones en el tiempo 0.

Restricción 2 Star no puede invertir más de 20 millones en el tiempo 1.

Restricción 3 Star no puede comprar más de 100% de la inversión i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Para expresar la restricción 1 en forma matemática, observe que (dólares invertidos en el tiempo 0) = (dólares invertidos en la inversión 1 en el tiempo 0) + (dólares invertidos en la inversión 2 en el tiempo 0) + ⋯ + (dólares invertidos en la inversión 5 en el tiempo 0). También en millones de dólares.

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\text{Dólares invertidos en la}\\ \text{inversión 1 en el tiempo 0}\end{matrix} &= \begin{pmatrix}\text{dólares requeridos para la}\\ \text{inversión 1 en el tiempo 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{fracción de la}\\ \text{inversión 1 comprada}\end{pmatrix}\\ &= 11x_1\end{aligned}$$

TABLA 7
Flujos de efectivo y valor neto actual para inversiones en presupuesto de gastos de capital

	Inversiones (dólares)				
	1	2	3	4	5
Salida de efectivo en el tiempo 0	11	53	5	5	29
Salida de efectivo en el tiempo 1	3	6	5	1	34
VNA	13	16	16	14	39

De igual manera, para las inversiones 2 a 5,

$$\text{Dólares invertidos en el tiempo } 0 = 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5$$

La limitación 1 se reduce a

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 \quad \text{(Limitación del tiempo 0)} \tag{26}$$

La limitación 2 se reduce a

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 \quad \text{(Limitación del tiempo 1)} \tag{27}$$

Las limitaciones 3 a 7 se podrían representar mediante

$$x_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{28-32}$$

Al combinar (26)-(32) con las restricciones de signo $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) se obtiene la PL siguiente:

$$
\begin{array}{llr}
\max z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 & & \\
\text{s.a} \quad 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 & & \text{(Limitación del tiempo 0)} \\
\quad 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 & & \text{(Limitación del tiempo 1)} \\
\quad x_1 \leq 1 & & \\
\quad x_2 \leq 1 & & \\
\quad x_3 \leq 1 & & \\
\quad x_4 \leq 1 & & \\
\quad x_5 \leq 1 & & \\
\quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) & &
\end{array}
$$

La solución óptima para esta PL es $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = 0.201$, $x_5 = 0.288$, $z = 57.449$. La Star Oil debe comprar 100% de las inversiones 1, 3 y 4; 20.1% de la inversión 2 y 28.8% de la inversión 5. Un VNA total de 57 449 000 dólares, se obtendrá con estas inversiones.

A menudo es imposible comprar sólo una fracción de la inversión sin sacrificar los flujos de efectivo favorables de la inversión. Supóngase que cuesta 12 millones de dólares perforar un pozo de petróleo de la suficiente profundidad para ubicar un pozo fluyente de 30 millones de dólares. Si hubiera un solo inversionista en este proyecto que proporcionara 6 millones de dólares para emprender la mitad del proyecto, entonces este inversionista podría perder toda la inversión y no recibiría flujos de efectivo positivos. En este ejemplo, disminuir la cantidad de dinero invertido en 50% reduce el rendimiento en más de 50%, situación que violaría la Suposición de proporcionalidad.

En muchos problemas de presupuesto de capital hay poca razón en permitir que x_i sea fraccionaria: toda x_i debe ser restringida a 0 (no invertir en la inversión i) o a 1 (comprar toda la inversión i). Por consiguiente, muchos problemas de presupuesto de capital incumplen la Suposición de divisibilidad.

Un modelo de presupuesto de capital que permite que toda x_i sea sólo 0 o 1 se analiza en la sección 9.2.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si $r = 0.02$, la inversión 2 tiene un mayor VNA que la inversión 1.

2 Se dispone de dos inversiones con flujos de efectivo variables (en miles de dólares) de acuerdo con la tabla 8. Están disponibles 10 000 dólares para la inversión en el tiempo 0, y en el tiempo 1, 7 000 dólares. Si se supone que $r = 0.10$, plantee un PL cuya solución maximice el VNA obtenido de estas inversiones. Determine gráficamente la solución óptima de la PL.

TABLA 8

Inversión	Flujo efectivo (en miles de dólares) en el tiempo 0	1	2	3
1	−6	−5	7	9
2	−8	−3	9	7

(Suponga que se puede comprar una fracción de una inversión.)

3 Suponga que r, la tasa de interés anual, es 0.20, y que todo el dinero en el banco gana 20% de interés cada año (es decir, después de estar en el banco durante un año, 1 dólar se convertirá en 1.20). Si colocamos 100 dólares en el banco durante un año, ¿cuál es el VNA de esta transacción?

4 Una compañía ha sometido 9 proyectos a consideración. El VNA sumado por cada proyecto y el capital requerido por cada proyecto durante los dos próximos años, se presenta en la tabla 9. Todos los valores están en millones. Por ejemplo, el proyecto 1 sumará 14 millones de dólares en VNA y requiere gastos por 12 millones durante el año 1, y 3 millones durante el año 2. Se dispone de 50 millones de dólares para los proyectos durante el año 1 y 20 millones están disponibles durante el año 2. Si se supone que se va a iniciar una fracción de cada proyecto, ¿cómo se puede maximizar VNA?

Grupo B

5[†] Finco debe determinar cuánta inversión y deuda comprometer durante el próximo año. Cada dólar invertido reduce el VNA de la compañía en 10 centavos, y cada dólar de deuda incrementa el VNA en 50 centavos (debido a la deducibilidad de los pagos de intereses). Finco es capaz de invertir cuando mucho un millón de dólares durante el año próximo. La deuda puede ser cuando mucho de 40% de la inversión. Finco tiene por ahora 800 000 dólares disponibles en efectivo. Todas las inversiones se deben pagar del efectivo actual o de dinero tomado a préstamo. Formule una PL cuya solución le diga a Finco cómo maximizar su VNA. Luego resuelva en forma gráfica el PL.

TABLA 9

	Proyecto 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Salida de efectivo en el año 1	12	54	6	6	30	6	48	36	18
Salida de efectivo en el año 2	3	7	6	2	35	6	4	3	3
VNA	14	17	17	15	40	12	14	10	12

3.7 Planificación financiera a corto plazo[‡]

Los modelos de PL se usan a menudo para ayudar a las empresas en la planificación a corto o largo plazos (*véase también* sección 3.11). Ahora se considera un ejemplo sencillo que ilustra cómo la PL puede usarse para ayudar a una compañía en la planificación financiera en el corto plazo.[§]

EJEMPLO 11 Planificación financiera a corto plazo

Semicond es una pequeña empresa de electrónica que fabrica grabadoras y radios. Los costos de mano de obra por unidad, los costos de materia prima y el precio de venta de los productos se proporcionan en la tabla 10. El primero de diciembre de 2002, Semicond tenía materia prima suficiente para la manufactura de 100 grabadoras y 100 radios. En la misma fecha, la hoja de balance de la compañía era la que se muestra en la tabla 11 y la relación de activos-pasivos (también conocida como relación de activo corriente a pasivo circulante) era de 20 000/10 000 = 2.

Semicond debe determinar cuántas grabadoras y cuántos radios tiene que producir durante diciembre. La demanda es lo suficientemente grande como para que todos los bienes producidos se vendan. Sin embargo, todas las ventas son a crédito, y los pagos por los bienes producidos en diciembre se recibirán apenas el primero de febrero de 2003. Durante diciembre, Semicond reunirá 2 000 dólares en cuentas por cobrar, pero debe abonar 1 000

[†]Basado en Myers y Pogue (1974).
[‡]Esta sección comprende material que se podría omitir sin que haya pérdida de continuidad.
[§]Esta sección se basa en un ejemplo de Neave y Wiginton (1981).

TABLA 10
Información de los costos en Semicond

	Grabadora	Radio
Precio de venta	$100	$90
Costo de mano de obra	$ 50	$35
Costo de materia prima	$ 30	$40

TABLA 11
Hoja de balance de Semicond

	Activos	Pasivos
Efectivo	$10 000	
Cuantas por cobrar[§]	$ 3 000	
Inventario existente[¶]	$ 7 000	
Préstamo bancario		$10 000

[§]Las cuentas por cobrar es dinero que clientes le deben a Semicond por productos que compraron previamente.
[¶]Valor del primero de diciembre de 2002, inventario = 30(100) + 40(100) = 7000 dólares.

dólares del préstamo pendiente y pagar un mes de renta de 1 000 dólares. El primero de enero de 2003, Semicond recibirá un embarque de materia prima por 2 000 dólares, que tiene que pagar el primero de febrero de 2003. La administración de Semicond ha decidido que el saldo en efectivo al primero de enero de 2003 debe ser por lo menos de 4 000 dólares. Asimismo, el banco de Semicond requiere que la relación de activo corriente a pasivo circulante al principio de enero sea de por lo menos 2. Para maximizar la contribución a la utilidad a partir de la producción de diciembre (ingresos por recibir) − (costos de producción variables), ¿qué debe producir Semicond en diciembre?

Solución Semicond debe determinar cuántas grabadoras y cuántos radios tiene que producir en diciembre. Por consiguiente, se define

$$x_1 = \text{cantidad de grabadoras fabricadas en diciembre}$$
$$x_2 = \text{cantidad de radios producidos en diciembre}$$

Para expresar la función objetivo de Semicond, obsérvese que

$$\frac{\text{Contribución a la utilidad}}{\text{Grabadora}} = 100 - 50 - 30 = 20 \text{ dólares}$$
$$\frac{\text{Contribución a la utilidad}}{\text{Radio}} = 90 - 35 - 40 = 15 \text{ dólares}$$

Al igual que en el ejemplo de Giapetto, esto genera la función objetivo

$$\max z = 20x_1 + 15x_2 \tag{33}$$

Semicond enfrenta las restricciones siguientes:

Restricción 1 Debido a la disponibilidad limitada de materia prima, es posible producir cuando mucho 100 grabadoras en diciembre.

Restricción 2 Debido a la disponibilidad limitada de materia prima, se pueden fabricar cuando mucho 100 radios en diciembre.

Restricción 3 El activo disponible el primero de enero de 2002 debe ser por lo menos de 4 000 dólares.

Restricción 4 Se debe cumplir (activos al primero de enero)/(pasivos al primero de enero) ≥ 2.

La restricción 1 se representa mediante

$$x_1 \leq 100 \tag{34}$$

La restricción 2 se representa con

$$x_2 \leq 100 \tag{35}$$

Para expresar la restricción 3, obsérvese que

Activo disponible el primero de enero = Activo disponible el primero de diciembre
+ Cuentas por cobrar reunidas durante diciembre
− Parte del préstamo abonado durante diciembre
− Renta de diciembre − Costos de mano de obra.
$= 10\,000 + 2\,000 - 1\,000 - 1\,000 - 50x_1 - 35x_2$
$= 10\,000 - 50x_1 - 35x_2$

Entonces, la restricción 3 se puede escribir como

$$10\,000 - 50x_1 - 35x_2 \geq 4\,000 \tag{36'}$$

La mayor parte de los códigos para computadora requiere que todas las restricciones de la PL se expresen en una forma en la cual todas las variables están en el primer miembro y las constantes en el segundo miembro. Por consiguiente, para obtener una solución por computadora la ecuación (36') se debe escribir como

$$50x_1 + 35x_2 \leq 6\,000 \tag{36}$$

Para expresar la restricción 4 es necesario determinar el encuadre (estado de la caja), cuentas por cobrar, situación del inventario y pasivos en términos de x_1 y x_2. Ya se estableció que

$$\text{Estado de la caja al primero de enero} = 10\,000 - 50x_1 - 35x_2$$

Entonces,

Cuentas por cobrar al primero de Enero = Cuentas por cobrar el primero de diciembre
+ cuentas por cobrar a partir de las ventas de diciembre
− cuentas por cobrar reunidas durante diciembre
$= 3\,000 + 100x_1 + 90x_2 - 2\,000$
$= 1\,000 + 100x_1 + 90x_2$

Se infiere ahora que

Valor del inventario al primero de Enero = Valor del inventario al primero de diciembre
− valor del inventario utilizando en diciembre
+ valor del inventario recibido al primero de enero
$= 7\,000 - (30x_1 + 40x_2) + 2\,000$
$= 9\,000 - 30x_1 - 40x_2$

Ya se puede calcular el estado de los activos al primero de enero:

Estado de los activos al primero de Enero = estado de la caja al primero de enero
+ cuentas por cobrar al primero de enero
+ situación del inventario al primero de enero
$= (10\,000 - 50x_1 - 35x_2) + (1\,000 + 100x_1 + 90x_2)$
$+ (9\,000 - 30x_1 - 40x_2)$
$= 20\,000 + 20x_1 + 15x_2$

Por último,

Pasivos al primero de enero = pasivos al primero de diciembre
− pago del préstamo de diciembre
+ cantidad que se debe por el embarque de inventario del primero de enero
= 10 000 − 1 000 + 2 000
= 11 000 dólares

Entonces, la restricción 4 ya se puede establecer como

$$\frac{20{,}000 + 20x_1 + 15x_2}{11{,}000} \geq 2$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por 11 000, se obtiene

$$20\,000 + 20x_1 + 15x_2 \geq 22\,000$$

Luego de arreglarla en forma adecuada acomodarla para que se pueda utilizar en computadora, se tiene

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2\,000 \tag{37}$$

Al combinar (33) a (37) con las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{array}{llr l}
\max z = 20x_1 + 15x_2 & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & \leq 100 & \text{(Restricción de la grabadora)} \\
 & x_2 & \leq 100 & \text{(Restricción del radio)} \\
 & 50x_1 + 35x_2 & \leq 6\,000 & \text{(Restricción del estado de caja)} \\
 & 20x_1 + 15x_2 & \geq 2\,000 & \text{(Restricción de la relación de activo corriente a pasivo circulante)} \\
 & x_1, x_2 & \geq 0 & \text{(Restricciones de signo)}
\end{array}$$

Tras resolver el PL en forma gráfica (o mediante computadora), se llega a la siguiente solución óptima: $z = 2\,500$, $x_1 = 50$, $x_2 = 100$. Por consiguiente, Semicond puede maximizar la contribución de la producción de diciembre a las utilidades mediante la fabricación de 50 grabadoras y 100 radios. Esto contribuye con $20(50) + 15(100) = 2\,500$ a las utilidades.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva en forma gráfica el problema de Semicond.

2 Suponga que el embarque de inventario del primero de enero está valuado en 7 000 dólares. Demuestre que el PL de Semicond ya no es factible.

3.8 Problemas de mezcla

Las situaciones en las cuales varios insumos se deben mezclar en cierta proporción para producir bienes para la venta se pueden someter, con frecuencia, al análisis de la programación lineal. Estos problemas reciben el nombre de **problemas de mezcla**. En la lista siguiente se encuentran algunas situaciones en las que la programación lineal se aplicó para resolver los problemas de mezcla.

1 Mezcla de distintos petróleos crudos para producir distintos tipos de gasolina y otros productos (como aceite combustible).

2 Combinación de varios productos químicos para obtener otros.

3 Combinación de varios tipos de aleaciones metálicas con el fin de producir varios tipos de acero.

4 Mezcla de varios forrajes para ganado en un intento para obtener un alimento de costo mínimo para los animales.

5 Mezcla de varios minerales con el fin de obtener un mineral de una calidad específica.

6 Combinación de varios ingredientes (carne, relleno, agua, entre otros) para elaborar un producto como el embutido *bologna*.

7 Mezcla de varios tipos de papel para fabricar papel reciclado de calidad variable.

El siguiente ejemplo ilustra las ideas importantes al plantear modelos de PL para problemas de mezclas.

EJEMPLO 12 Mezcla de crudos

Sunco Oil produce tres tipos de gasolina (gas 1, gas 2 y gas 3). Cada tipo se obtiene a partir de la mezcla de tres tipos de petróleo crudo (crudo 1, crudo 2 y crudo 3). El precio de venta por barril de gasolina y el precio de compra por barril de crudo se proporcionan en la tabla 12. Sunco tiene la capacidad de comprar al día hasta 5 000 barriles de cada tipo de crudo.

Los tres tipos de gasolina difieren en su índice de octano y en el contenido de azufre. El crudo mezclado para producir la gasolina 1 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 10, y contener cuando mucho 1% de azufre. La mezcla de crudos para producir la gasolina 2 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 8, y contener cuando mucho 2% de azufre. Los crudos mezclados para producir la gasolina 3 deben tener un índice de octano de por lo menos 6, y contener cuando mucho 1% de azufre. El índice de octano y el contenido de azufre de los tres tipos de crudo se presentan en la tabla 13. Cuesta 4 dólares la transformación de un barril de crudo en un barril de gasolina, y la refinería de Sunco tiene la capacidad para refinar al día hasta 14 000 barriles de gasolina.

Los clientes de Sunco requieren las cantidades siguientes de cada gasolina: gas 1, 3 000 barriles diarios; gas 2, 2 000 barriles por día; gas 3, 1 000 barriles por día. La compañía considera que es una obligación cumplir con esta demanda. Asimismo tiene la opción de anunciarse para impulsar la demanda de sus productos. Cada dólar que gasta diariamente por anunciar un tipo específico de gasolina, incrementa la demanda del día por ese tipo de producto en 10 barriles. Por ejemplo, si Sunco decide gastar todos los días 20 dólares en anunciar la gasolina 2, entonces la demanda diaria de este producto se incrementa en $20(10) = 200$ barriles. Plantee una PL que le permita a Sunco maximizar las utilidades diarias (utilidades = ingresos − costos).

Solución Sunco debe tomar dos tipos de decisiones: primero, cuánto dinero debe gastar en anunciar cada tipo de gasolina y, segundo, cómo hacer la mezcla para cada tipo de gasolina a partir de los tres tipos de crudo. Por ejemplo, Sunco debe decidir cuántos barriles de crudo 1 debe usar para producir gasolina 1. Las variables de decisión se definen de la siguiente manera:

a_i = dólares gastados diariamente en anuncios de la gasolina i $\quad (i = 1, 2, 3)$

x_{ij} = barriles de crudo i usados para producir gasolina j $\quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$

Por ejemplo, x_{21} es el número de barriles de crudo 2 usados todos los días para producir gasolina 1.

TABLA 12
Precios de los crudos para la mezcla y de gasolina

Gasolina	Precios de venta por barril (dólares)	Crudo	Precio de compra por barril (dólares)
1	70	1	45
2	60	2	35
3	50	3	25

TABLA 13
Índice de octano y contenido de azufre en la mezcla

Crudo	Índice de octano	Contenido de azufre (%)
1	12	0.5
2	6	2.0
3	8	3.0

Conocer estas variables es suficiente para determinar la función objetivo de Sunco y las restricciones, pero antes de hacerlo, hay que hacer notar que la definición de las variables de decisión requiere

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= \text{barriles de crudo 1 usados todos los días} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= \text{barriles de crudo 2 usados todos los días} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= \text{barriles de crudo 3 usados todos los días} \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= \text{barriles de gasolina 1 producidos al día} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= \text{barriles de gasolina 2 producidos al día} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= \text{barriles de gasolina 3 producidos al día} \end{aligned} \tag{39}$$

Con el fin de simplificar el problema, se supone que no se puede almacenar gasolina, por lo que se debe vender el mismo día en que se produce. Esto significa que para $i = 1, 2, 3$, la cantidad de gasolina i producida diariamente debe ser igual a la demanda diaria de gasolina i. Suponga que la cantidad de gasolina i producida al día excede la demanda diaria. Entonces habríamos incurrido en compras y costos de producción innecesarios. Por otro lado, si la cantidad de gasolina i que se obtiene todos los días es menor que la demanda diaria de dicha gasolina, entonces no se cumple con la demanda o se está incurriendo en costos de publicidad innecesarios.

Ya estamos listos para determinar la función objetivo de Sunco y las limitaciones. Empezamos con la función objetivo de Sunco. De acuerdo con (39),

$$\begin{aligned} \text{Ingresos diarios por las ventas de gasolina} &= 70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ &\quad + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

De (38),

$$\begin{aligned} \text{Costos diarios por la compra de crudo} &= 45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \\ &\quad + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\text{Costos diarios por publicidad} = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\text{Costos diarios de producción} = 4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Utilidad diaria} &= \text{ingreso diario por las ventas de gasolina} \\ &\quad - \text{costo diario de la compra de crudo} \\ &\quad - \text{costos diarios por publicidad} - \text{costos diarios de producción} \\ &= (70 - 45 - 4)x_{11} + (60 - 45 - 4)x_{12} + (50 - 45 - 4)x_{13} \\ &\quad + (70 - 35 - 4)x_{21} + (60 - 35 - 4)x_{22} + (50 - 35 - 4)x_{23} \\ &\quad + (70 - 25 - 4)x_{31} + (60 - 25 - 4)x_{32} \\ &\quad + (50 - 25 - 4)x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el objetivo de Sunco es maximizar

$$z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \tag{40}$$

Respecto a las restricciones de Sunco, consideramos que se deben cumplir las 13 limitaciones siguientes:

Restricción 1 La gasolina 1 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 2 La gasolina 2 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 3 La gasolina 3 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 4 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 1 por día.

Restricción 5 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 2 por día.

Restricción 6 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 3 por día.

Restricción 7 Debido a la capacidad limitada de la refinería, se pueden producir al día cuando mucho 14 000 barriles.

Restricción 8 La mezcla de crudos para producir gasolina 1 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 10.

Restricción 9 La mezcla de crudos para producir gasolina 2 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 8.

Restricción 10 La mezcla de crudos para producir gasolina 3 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 6.

Restricción 11 La mezcla de crudos para producir gasolina 1 debe contener cuando mucho 1% de azufre.

Restricción 12 La mezcla de crudos para producir gasolina 2 debe contener cuando mucho 2% de azufre.

Restricción 13 La mezcla de crudos para producir gasolina 3 debe contener cuando mucho 1% de azufre.

Para expresar la restricción 1 en términos de las variables de decisión, observe que

$$\text{Demanda diaria de gas 1} = 3\,000 + \text{demanda de gas 1 generada por la publicidad}$$

$$\text{Demanda de gas 1generada por la publicidad} = \left(\frac{\text{demanda de gas 1}}{\text{dólar gastado}}\right)\left(\begin{matrix}\text{dólares}\\ \text{gastados}\end{matrix}\right) = 10a_1{}^{\dagger}$$

Por tanto, la demanda diaria de gas 1 $= 3\,000 + 10a_1$. La restricción 1 se podría escribir como

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3\,000 + 10a_1 \tag{41'}$$

y al ser arreglada, se tiene

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 = 3\,000 \tag{41}$$

La restricción 2 se expresa mediante

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 = 2\,000 \tag{42}$$

†Muchos estudiantes creen que la demanda de gas 1 generada por la publicidad se debería escribir como $\frac{1}{10}a_1$. Si se analizan las unidades de este término, se encuentra que no es correcto. $\frac{1}{10}$ tiene unidades de dólares gastados por barril de demanda, y a_1 tiene unidades de dólares gastados. Por lo tanto, el término $\frac{1}{10}a_1$ tendría unidades de (dólares gastados)^2 por barril de demanda. ¡Esto no puede ser correcto!

La restricción 3 se expresa con

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 = 1\,000 \tag{43}$$

De acuerdo con (38), la restricción 4 se reduce a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5\,000 \tag{44}$$

La expresión para la restricción 5 es

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5\,000 \tag{45}$$

y para la restricción 6 es

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5\,000 \tag{46}$$

Observe que

Gasolina total producida = gasolina 1 producida + gasolina 2 producida + gasolina 3 producida

$$= (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (x_{12} + x_{22} + x_{32}) + (x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

La restricción 7 se vuelve

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14\,000 \tag{47}$$

Para expresar las restricciones 8 a 10, uno debe ser capaz de determinar el índice de octano "promedio" en una mezcla de distintos tipos de crudo. Se supone que los octanajes de diferentes crudos se mezclan en forma lineal. Por ejemplo, si se mezclan dos barriles de crudo 1, tres barriles de crudo 2 y un barril de crudo 3, el índice promedio de octano sería

$$\frac{\text{Valor del total del octano en la mezcla}}{\text{Número de barriles en la mezcla}} = \frac{12(2) + 6(3) + 8(1)}{2 + 3 + 1} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$$

Generalizando, la restricción 8 se expresa mediante

$$\frac{\text{Valor total de octano en gas 1}}{\text{Gas 1 en la mezcla}} = \frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10 \tag{48'}$$

Infortunadamente (48´) no es una desigualdad lineal. Para transformar (48´) en una desigualdad lineal, todo lo que se tiene que hacer es multiplicar ambos miembros por el denominador del primer miembro. La desigualdad resultante es

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

que se puede expresar también como

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0 \tag{48}$$

De igual manera, la limitación 9 es

$$\frac{12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 8$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ y simplificar, se obtiene

$$4x_{12} - 2x_{22} \geq 0 \tag{49}$$

Como todos los crudos del problema tienen un índice de octano de 6 o superior, cualquier mezcla para manufacturar la gasolina 3 tendrá un índice de octano promedio de por lo menos 6. Esto quiere decir que cualquier valor de las variables cumple con la restricción 10. Con el fin de comprobarlo, la restricción 10 se expresaría de la manera siguiente:

$$\frac{12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geq 6$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{13} + x_{23} + x_{33}$ y simplificar se llega a

$$6x_{13} + 2x_{33} \geq 0 \tag{50}$$

Como $x_{13} \geq 0$ y $x_{33} \geq 0$ siempre se cumplen, (50) se satisface en forma automática, por lo que no es necesario incluirla en el modelo. Una limitación como (50), que se infiere de otras restricciones en el modelo se denomina **restricción redundante** y no requiere ser incluida en el planteamiento.

La restricción (11) se podría expresar como sigue

$$\frac{\text{Total de azufre en la mezcla de gas 1}}{\text{Cantidad de barriles en la mezcla de gas 1}} \leq 0.01$$

Entonces, usando los porcentajes de azufre en cada tipo de aceite, se observa que

$$\begin{aligned}\text{Azufre total en la mezcla de gasolina 1} &= \text{Azufre en el crudo 1 usado para la gasolina 1}\\ &+ \text{azufre en el crudo 2 usado para la gasolina 1}\\ &+ \text{azufre en el crudo 3 usado para la gasolina 1}\\ &= 0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31}\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 11 ya se puede escribir como

$$\frac{0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 0.01$$

Una vez más, ésta no es una desigualdad lineal, pero al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{11} + x_{21} + x_{31}$ y simplificar, se obtiene

$$-0.005x_{11} + 0.01x_{21} + 0.02x_{31} \leq 0 \tag{51}$$

De manera similar, la restricción 12 equivale a

$$\frac{0.005x_{12} + 0.02x_{22} + 0.03x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leq 0.02$$

Luego de multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ y simplificar se obtiene

$$-0.015x_{12} + 0.01x_{32} \leq 0 \tag{52}$$

Por último, la restricción 13 es equivalente a

$$\frac{0.005x_{13} + 0.02x_{23} + 0.03x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leq 0.01$$

Al multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por $x_{13} + x_{23} + x_{33}$ y simplificar, se llega a

$$-0.005x_{13} + 0.01x_{23} + 0.02x_{33} \leq 0 \tag{53}$$

Cuando se combinan (40) a (53), excepto la restricción redundante (50), con las restricciones de signo $x_{ij} \geq 0$ y $a_i \geq 0$ se obtiene un PL que se podría expresar en forma tabular (véase tabla 14). En la tabla 14, el primer renglón (max) representa la función objetivo, el segundo renglón representa la primera restricción, y así sucesivamente. Al resolverse con computadora, se obtiene una solución óptima para el PL de Sunco:

$$z = 287\,500$$

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 2222.22 & x_{12} = 2111.11 & x_{13} = 666.67 \\ x_{21} = 444.44 & x_{22} = 4222.22 & x_{23} = 333.34 \\ x_{31} = 333.33 & x_{32} = 3166.67 & x_{33} = 0 \end{array}$$

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 750 \qquad a_3 = 0$$

TABLA 14
Función objetivo y restricciones para efectuar la mezcla

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_1	a_2	a_3	
21	11	1	31	21	11	41	31	21	−1	−1	−1	(max)
1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	0	0	= 3 000
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	0	= 2 000
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	= 1 000
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	≤ 5 000
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	≤ 5 000
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	≤ 5 000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	≤ 14 000
2	0	0	−4	0	0	−2	0	0	0	0	0	≥ 0
0	4	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	≥ 0
−0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	0	0	≤ 0
0	−0.015	0	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	≤ 0
0	0	−0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	≤ 0

Por consiguiente, Sunco podría producir $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3\,000$ barriles de gasolina 1 usando 2 222.22 barriles de crudo 1 444.44 barriles de crudo 2 y 333.33 barriles de crudo 3. La compañía podría producir $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9\,500$ barriles de gasolina 2 usando 2 111.11 barriles de crudo 1 4 222.22 barriles de crudo 2 y 3 166.67 barriles de crudo 3. Sunco también podría producir $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1\,000$ barriles de gasolina 3 usando 666.67 barriles de crudo 1 y 333.34 barriles de crudo 2. Asimismo, la empresa podría gastar 750 dólares en anunciar la gasolina 2. Sunco tendrá una utilidad de 287 500 dólares.

Observe que aunque la gasolina 1 es, al parecer, la que reditúa más utilidades, estimulamos la demanda de la gasolina 2, y no de la 1. La razón es que dada la calidad (respecto al índice de octano y contenido de azufre) del crudo disponible es difícil producir gasolina 1. Por lo tanto, Sunco puede ganar más dinero por producir más de la gasolina 2 de menor calidad que produciendo cantidades extra de gasolina 1.

Aspectos relacionados con los modelos

1 Se ha supuesto que el nivel de calidad de una mezcla es una función **lineal** de cada insumo usado para la mezcla. Por ejemplo, se dio por hecho que si la gasolina 3 estaba fabricada con $\frac{2}{3}$ de crudo 1 y $\frac{1}{3}$ de crudo 2, entonces el índice de octano para la gasolina 3 = $(\frac{2}{3})$ · (índice de octano del crudo 1) + $(\frac{1}{3})$ · (índice de octano del crudo 2). Si el índice de octano de una gasolina no es una función lineal de la fracción de cada insumo que se usa para producir la gasolina, entonces ya no hay un problema de programación lineal; lo que se tiene es un problema de **programación no lineal.** Por ejemplo, sea g_{i3} la fracción de gasolina 3 hecha con crudo i. Suponga que el índice de octano para la gasolina 3 está dado por índice de octano de la gasolina 3 = $g_{13}{}^{.5}$ · (índice de octano del crudo 1) + $g_{23}{}^{.4}$ · (índice de octano del crudo 2) + $g_{33}{}^{.3}$ · (índice de octano del crudo 3). Entonces no es un problema de programación lineal. La razón es que el índice de octano de la gasolina 3 no es una función lineal de g_{13}, g_{23} y g_{33}. La programación no lineal se trata en el capítulo 11.

2 En realidad, una compañía que utiliza un modelo de mezclas lo aplicaría en forma periódica (todos los días, quizá), y establecería la producción con base en el inventario actual de insumos y pronósticos de demanda actual. Luego se actualizarían los niveles de pronóstico y los niveles de insumos, y se ejecutaría de nuevo el modelo para determinar la producción del día siguiente.

Aplicaciones a la vida cotidiana

Mezcla en Texaco

Texaco (véanse Dewitt y col., 1980) utiliza un modelo de programación no lineal (OMEGA) para planificar y calendarizar sus aplicaciones de mezclas. El modelo de la compañía es no lineal, porque las volatilidades y el octanaje de la mezcla son funciones no lineales de la cantidad de cada insumo usado para producir una gasolina en particular.

Mezcla en la industria acerera

Fabian (1958) explica un modelo complejo de programación lineal que se puede usar para optimizar la producción de hierro y acero. Para cada producto elaborado hay varias restricciones en cuanto a la mezcla. Por ejemplo, el hierro de primera fusión básico debe contener cuando mucho 1.5% de silicio, cuando mucho 0.05% de azufre, entre 0.11% y 0.90% de fósforo, entre 0.4% y 2% de manganeso y entre 4.1 y 4.4% de carbono. Véase un ejemplo sencillo de mezcla en la industria acerera en el problema 6 (en la sección de Problemas de repaso).

Mezcla en la industria petrolera

Diversas compañías usan programación lineal para optimizar sus operaciones en la refinería. Un ejemplo sobre un modelo de mezclas (basado en Magoulas y Marinos-Kouris [1988]) que se puede usar para maximizar las utilidades de una refinería se encuentra en el ejemplo 14.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Usted ha decidio entrar a la industria de los dulces. Está pensando en producir dos tipos de dulces: dulce macizo y dulce suave. Ambos están elaborados sólo con azúcar, nueces y chocolate. En la actualidad tiene en existencia 100 oz de azúcar, 20 oz de nueces y 30 oz de chocolate. La mezcla usada para elaborar el dulce suave debe contener por lo menos 20% de nueces. La mezcla que se utiliza para el dulce macizo debe contener por lo menos 10% de nueces y 10% de chocolate. Cada onza del dulce suave se vende a 25 centavos y cada onza de dulce macizo, en 20 centavos. Plantee un PL que le permita maximizar sus ingresos con la venta de dulces.

2 O.J. Juice Company vende bolsas de naranjas y jugo de naranja en envases de cartón. O.J. clasifica las naranjas según una escala de 1 (malas) a 10 (excelentes). O.J. dispone en la actualidad de 100 000 lb de naranjas grado 9 y 120 000 lb de naranjas grado 6. La calidad promedio de naranjas vendidas en bolsas debe ser por lo menos de 7, y la calidad promedio de las naranjas utilizadas para fabricar el jugo de naranja debe ser por lo menos de 8. Cada libra de naranjas que se usa para el jugo rinde un ingreso de 1.50 dólares, e incurre en un costo variable (que consiste en costos de mano de obra, costos generales variables, costos de inventario, entre otros) de 1.05 dólares. Cada libra de naranjas que se vende en bolsa contribuye con un ingreso de 50 centavos e incurre en un costo variable de 20 centavos. Formule un PL para ayudar a O.J. a maximizar su utilidad.

3 Un banco desea saber dónde debe invertir sus ingresos durante el presente año. En la actualidad dispone de 500 000 dólares para inversiones en títulos, préstamos para compra de casas, préstamos para compra de autos y préstamos personales. Se sabe que la tasa anual de retorno en cada tipo de inversión es en título, 10%; préstamos para compra de casas, 16%; préstamos para compra de automóviles, 13%; préstamos personales, 20%. Para asegurarse que el conjunto de inversiones del banco no es demasiado riesgoso, el gerente de inversiones del banco ha propuesto las tres restricciones siguientes:

- **a** La cantidad invertida en préstamos personales no puede ser mayor a la cantidad invertida en títulos.
- **b** La cantidad invertida en préstamos para casas no puede sobrepasar la cantidad invertida en préstamos para automóviles.
- **c** No más del 25% de la cantidad total invertida podría ser para préstamos personales.

El objetivo del banco es maximizar el rendimiento anual en su conjunto de inversiones. Plantee un PL que posibilite al banco a cumplir con su meta.

4 Erica Cudahy podría invertir hasta 1 000 dólares. Este dinero lo podría invertir en acciones o en préstamos. Cada dólar invertido en acciones rinde 10 centavos de utilidad, y cada dólar invertido en un préstamo rinde 15 centavos de utilidad. Por lo menos 30% de todo el dinero invertido debe ser en acciones, y por lo menos 400 dólares deben ser invertidos en préstamos. Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar la utilidad total ganada por las inversiones de Erica. Después resuelva en forma gráfica la PL.

5 Chandler Oil Company tiene 5 000 barriles de crudo 1 y 10 000 barriles de crudo 2. La compañía vende dos productos: gasolina y aceite combustible. Ambos productos se elaboran combinando el crudo 1 y el crudo 2. La calidad de cada crudo es como sigue: crudo 1, 10; crudo 2, 5. La gasolina debe tener una calidad promedio de por lo menos 8, y el aceite combustible, por lo menos 6. La demanda de cada producto debe ser creada por la publicidad. Cada dólar gastado en anunciar a la gasolina crea 5 barriles de demanda, y cada dólar gastado en el aceite combustible origina 10 barriles de demanda. La gasolina se vende a 25 dólares por barril y el aceite combustible a 20 dólares. Formule un PL para ayudar a Chandler a maximizar sus utilidades. Suponga que no se puede comprar crudo de ninguno de estos tipos.

6 Bullco mezcla silicio y nitrógeno para producir dos tipos de fertilizantes. El fertilizante 1 debe contener por lo menos 40% de nitrógeno y venderse en 70 dólares la libra. El fertilizante 2 debe contener por lo menos 70% de silicio y venderse a 40 dólares la libra. Bullco puede comprar hasta 80 lb de nitrógeno a 15 dólares la libra, y hasta 100 lb de silicio a 10 dólares la libra. Suponga que todo el fertilizante se vende. Formule un PL para ayudar a Bullco a maximizar las ganancias.

7 Eli Daisy utiliza los productos químicos 1 y 2 para elaborar dos fármacos. El fármaco 1 debe tener por lo menos el 70% del producto químico 1, y el fármaco 2 debe contener por lo menos 60% del producto 2. Se pueden vender hasta 40 oz del fármaco 1 a 6 dólares la onza; se pueden vender hasta 30 oz del fármaco 2 a 5 dólares la onza. Se pueden comprar hasta 45 oz del producto químico 1 a 6 dólares la onza, y se pueden comprar hasta 40 oz del producto químico 2 a 4 dólares la onza. Plantee un PL que maximice las utilidades de Daisy.

8 La Highland TV-Radio Store debe determinar cuántos televisores y radios conservar en existencia. Un televisor requiere 10 pies cuadrados de espacio en el piso, en tanto que un radio necesita 4 pies cuadrados. Se dispone de 200 pies cuadrados de espacio en el piso. Un televisor gana 60 dólares en utilidades, y un radio 20 dólares. La tienda almacena sólo televisores y radios. Los requisitos del mercado señalan que por lo menos 60% de todos los aparatos debe ser radios. Por último, un televisor inmoviliza 200 dólares del capital, y un radio, 50 dólares. Highland quiere tener cuando mucho un valor de 3 000 dólares de capital inmovilizado en cualquier momento. Plantee un PL con el que se pueda maximizar la utilidad de esta compañía.

9 Muchas compañías de Wall Street utilizan modelos de PL para seleccionar opciones de inversión en títulos. Lo que sigue es una versión simplificada de dichos modelos. Solodrex está considerando invertir en cuatro títulos; dispone de 1 000 000 de dólares para invertir. El rendimiento anual esperado, el rendimiento anual en el peor de los casos de cada título y la "duración" de cada título se proporcionan en la tabla 15. La duración de un título es una medida de la sensibilidad del título a las tasas de interés. Solodrex quiere maximizar el rendimiento esperado a partir de sus inversiones en títulos, sujeto a tres restricciones.

Restricción 1 El rendimiento en el peor de los casos de la opción de inversión en títulos debe ser por lo menos de 8%.

Restricción 2 La duración promedio de la opción de inversión debe ser cuando mucho 6. Por ejemplo, una opción de inversión que invierte 600 000 dólares en el título 1 y 400 000 en el título 4 tendría una duración promedio de

$$\frac{60\,0000(3) + 400\,000(9)}{1\,000\,000} = 5.4$$

Restricción 3 Debido a los requisitos de diversificación, cuando mucho 40% de la cantidad total invertida puede estar invertido en un solo título.

Formule un PL que le permita a Solodrex maximizar el rendimiento esperado por sus inversiones.

TABLA 15

Título	Rendimiento esperado (%)	Rendimiento en el peor de los casos (%)	Duración
1	13	6%	3
2	8	8%	4
3	12	10%	7
4	14	9%	9

10 Coalco explota carbón en tres minas y lo embarca para cuatro clientes. Los costos por tonelada de carbón en producción, la ceniza y el contenido de azufre (por tonelada, t) del carbón y la capacidad de producción (en toneladas) de cada mina se proporcionan en la tabla 16. La cantidad de toneladas de carbón que solicita cada cliente se presenta en la tabla 17.

El costo (en dólares) por embarcar una tonelada de carbón desde una mina a cada cliente se proporciona en la tabla 18. Se requiere que la cantidad total de carbón embarcado contenga cuando mucho 5% de ceniza y cuando mucho 4% de azufre. Plantee un PL que minimice el costo por cumplir las demandas de los clientes.

11 Eli Daisy fabrica el medicamento Rozac a partir de cuatro productos químicos. Hoy deben producir 1 000 lb del fármaco. Los tres ingredientes activos de Rozac son A, B y C. Por peso, por lo menos 8% de Rozac debe ser A, por lo menos 4% de B y por lo menos 2% de C. El costo por libra de cada producto químico y la cantidad de cada ingrediente activo en una libra de cada producto se proporcionan en la tabla 19.

TABLA 16

Mina	Costo de producción (dólares)	Capacidad	Contenido de ceniza (t)	Contenido de azufre (t)
1	50	120	0.08	0.05
2	55	100	0.06	0.04
3	62	140	0.04	0.03

TABLA 17

Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
80	70	60	40

TABLA 18

	Cliente			
Mina	1	2	3	4
1	4	6	8	12
2	9	6	7	11
3	8	12	3	5

Es necesario que se utilicen por lo menos 100 lb del producto químico 2. Encuentre un PL cuya solución determine la forma más barata de producir el lote de hoy de Rozac.

TABLA 19

Producto químico	Costo (dólares por lb)	A	B	C
1	8	0.03	0.02	0.01
2	10	0.06	0.04	0.01
3	11	0.10	0.03	0.04
4	14	0.12	0.09	0.04

12 (Una hoja de cálculo podría ser útil en este problema). El índice de riesgo de una inversión se puede obtener a partir del rendimiento o rentabilidad de la inversión (en términos absolutos) por año, y calculando el promedio.

Suponga que usted pretende determinar qué porcentaje de su dinero debe ser invertido en bonos del tesoro, oro y acciones. En la tabla 20 (o archivo Inv68.xls) se proporcionan los rendimientos anuales (cambio en el valor) para estas inversiones durante los años 1968 a 1988. Sea el índice de riesgo de unas opciones de inversión el promedio ponderado (de acuerdo con la fracción de su dinero asignada a cada inversión) del índice de riesgo de cada inversión. Suponga que la cantidad de cada inversión debe estar entre 20 y 50% del total invertido. A usted le gustaría que el índice riesgo de sus opciones de inversión fuera de 0.15, y su objetivo es maximizar el rendimiento esperado de sus inversiones. Plantee un PL cuya solución maximice el rendimiento esperado de sus opciones de inversión, sujeto a las restricciones dadas. Utilice el rendimiento promedio ganado por cada inversión durante los años 1968 a 1988 como su estimación del rendimiento esperado.[†]

Grupo B

13 El dueño de Sunco opina que nuestra solución óptima de la PL no maximizará la utilidad diaria. Su razonamiento es el siguiente: "Tenemos 14 000 barriles de capacidad de refinación diaria, pero la solución óptima produce sólo 13 500 barriles. Por lo tanto, esto no puede ser maximizar la utilidad." ¿Qué podría responder usted?

14 Oilco elabora dos productos: gasolina regular y premium. Cada producto contiene 0.15 gramos de plomo por litro. Los dos productos se elaboran a partir de seis insumos: reformado, gasolina del desintegrador catalítico de líquidos (FCG), isomerato (ISO), polímero (POL), MTBE (MTB) y butano (BUT). Cada insumo tiene cuatro atributos:

Atributo 1 Índice de octano de investigación (IOI)
Atributo 2 RVP
Atributo 3 Volatilidad ASTM a 70°C
Atributo 4 Volatilidad ASTM a 130°C

Los atributos y la disponibilidad diaria (en litros) de cada insumo se dan en la tabla 21.

Los requisitos de cada insumo se dan en la tabla 22.

La demanda diaria (en miles de litros) de cada producto se debe cumplir, pero se puede producir más si así se desea. El IOI y las condiciones de ASTM son los mínimos. La gasolina regular se vende a 29.49 centavos por litro, y la gasolina premium en 31.43 centavos el litro. Antes de que cada producto esté listo para la venta, se debe eliminar 0.15 g/L de plomo de cada uno de ellos. El costo de eliminar 0.1 g/L es 8.5 centavos. Cuando mucho, el 38% de cada tipo de gasolina puede ser FCG. Plantee y resuelva un PL cuya solución indique a Oilco cómo maximizar sus utilidades diarias.[‡]

TABLA 20

Año	Existencia	Oro	T-Bills
1968	11	11	5
1969	−9	8	7
1970	4	−14	7
1971	14	14	4
1972	19	44	4
1973	−15	66	7
1974	−27	64	8
1975	37	0	6
1976	24	−22	5
1977	−7	18	5
1978	7	31	7
1979	19	59	10
1980	33	99	11
1981	−5	−25	15
1982	22	4	11
1983	23	−11	9
1984	6	−15	10
1985	32	−12	8
1986	19	16	6
1987	5	22	5
1988	17	−2	6

TABLA 21

	Disponibilidad	IOI	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Reformado	15 572	98.9	7.66	−5	46
FCG	15 434	93.2	9.78	57	103
ISO	6 709	86.1	29.52	107	100
POL	1 190	97	14.51	7	73
MTB	748	117	13.45	98	100
BUT	Ilimitado	98	166.99	130	100

TABLA 22

	Demanda	IOI	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Regular	9.8	90	21.18	10	50
Premium	30	96	21.18	10	50

[†]Basado en Chandy (1987).

[‡]Basado en Magoulas y Marinos-Kouris (1988).

3.9 Modelos del proceso de producción

Enseguida se explica cómo plantear un modelo de PL para un proceso sencillo de producción.† El paso clave es determinar cómo se relacionan los productos de una etapa superior del proceso con los productos de una etapa temprana.

EJEMPLO 13 Proceso de producción bruta

Rylon Corporation fabrica los perfumes Brute y Chanelle. La materia prima necesaria para elaborar cada tipo de perfume se compra a 3 dólares la libra. Para procesar 1 lb de materia prima, se necesita 1 h de tiempo de laboratorio. Cada libra de materia prima procesada rinde 3 oz del perfume Brute regular y 4 oz del perfume Chanelle regular. El Brute regular se vende a 7 dólares la onza, y el Chanelle regular, a 6 dólares la onza. Rylon tiene también la opción de procesar aún más Brute regular y Chanelle regular para obtener Luxury Brute, que se vende a 18 dólares la onza, y Luxury Chanelle, que se vende a 14 dólares la onza. Cada onza de Brute regular que se somete a otro proceso requiere 3 h adicionales de laboratorio, el costo del proceso es de 4 dólares y rinde una onza de Luxury Brute. Cada onza de Chanelle regular que se somete a otro proceso requiere 2 h adicionales de laboratorio, el costo del proceso es de 4 dólares y rinde una onza de Luxury Chanelle. Rylon tiene al año 6 000 h de tiempo de laboratorio disponibles, y puede comprar hasta 4 000 lb de materia prima. Plantee un PL que se pueda aplicar para determinar cómo Rylon puede maximizar sus utilidades. Suponga que el costo de las horas de laboratorio es un costo fijo.

Solución Rylon debe determinar cuánta materia prima comprar y cuánto de cada tipo de perfume producir. Por lo tanto, se definirán las variables de decisión:

x_1 = cantidad de onzas de Brute regular vendidas al año

x_2 = cantidad de onzas de Luxury Brute vendidas al año

x_3 = cantidad de onzas de Chanelle regular vendidas al año

x_4 = cantidad de onzas de Luxury Chanelle vendidas al año

x_5 = cantidad de libras de materia prima compradas cada año

Rylon quiere maximizar

$$\begin{aligned}\text{Contribución a la utilidad} &= \text{ingresos por las ventas de perfumes} - \text{costos de proceso}\\ &\quad - \text{costos de compra de materia prima}\\ &= 7x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 14x_4 - (4x_2 + 4x_4) - 3x_5\\ &= 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función objetivo de Rylon se podría escribir como

$$\max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 \tag{54}$$

Rylon se enfrenta a las siguientes restricciones:

Restricción 1 No se pueden comprar más de 4 000 lb de materia prima al año.

Restricción 2 No se pueden usar más de 6 000 h de tiempo de laboratorio cada año.

La restricción 1 se expresa mediante

$$x_5 \leq 4\,000 \tag{55}$$

†Esta sección se basa en Hartley (1971).

Para expresar la restricción 2, obsérvese que

Tiempo total de laboratorio al año = tiempo usado al año para procesar la materia prima
+ tiempo usado al año para procesar Luxury Brute
+ tiempo usado al año para procesar Luxury Chanelle
$= x_5 + 3x_2 + 2x_4$

La restricción 2 se transforma en

$$3x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 6\,000 \tag{56}$$

Después de agregar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, muchos estudiantes afirman que Rylon debería resolver la PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 & \\ \text{s.a} \qquad x_5 \leq 4\,000 & \\ 3x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 6\,000 & \\ x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) & \end{aligned}$$

Este planteamiento es incorrecto. Observe que las variables x_1 y x_3 no aparecen en ninguna de las restricciones. Esto quiere decir que cualquier punto $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ y x_1 y x_3 muy grandes estan en la región factible. Los puntos con x_1 y x_3 grandes pueden proporcionar utilidades arbitrariamente elevadas. Por consiguiente, esta PL es no acotada. El error es que el presente planteamiento no indica que la cantidad de materia prima comprada determina la cantidad de Brute y Chanelle que está listo para la venta o para un proceso adicional. Más específicamente, de la figura 10 (y el hecho de que 1 oz de Brute procesado rinde exactamente 1 oz de Luxury Brute) se infiere que

$$\begin{array}{c}\text{Onzas de Brute regular vendidas}\\ +\text{ onzas de Luxury Brute vendidas}\end{array} = \left(\frac{\text{onzas de Brute producidas}}{\text{libras de materia prima}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{libras de materia}\\ \text{prima comprada}\end{array}\right) = 3x_5$$

La relación se refleja en la restricción

$$x_1 + x_2 = 3x_5 \qquad \text{o bien} \qquad x_1 + x_2 - 3x_5 = 0 \tag{57}$$

De igual manera, de la figura 10 es evidente que

$$\text{Onzas de Chanelle regular vendidas} + \text{onzas de Luxury Chanelle vendidas} = 4x_5$$

Esta relación origina la restricción

$$x_3 + x_4 = 4x_5 \qquad \text{o bien} \qquad x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \tag{58}$$

Las limitaciones (57) y (58) relacionan varias variables de decisión. Los estudiantes omiten, con frecuencia, restricciones de este tipo. Como este problema lo señala, no considerar una sola restricción, podría dar como resultado una respuesta inaceptable (tal co-

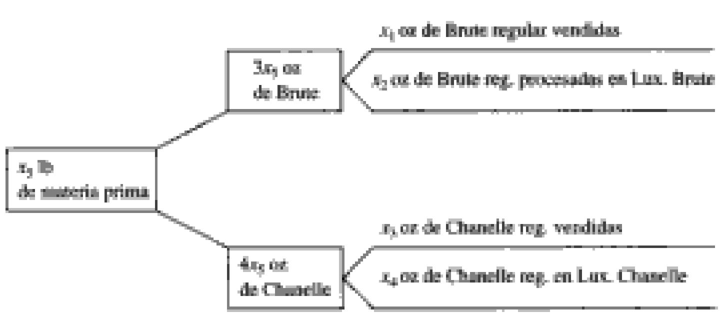


FIGURA 10
Proceso de producción para Brute y Chanelle

mo una PL no acotada). Si se combinan (53) a (58) con las restricciones de signo ordinarias, se llega al planteamiento *correcto* de la PL.

$$
\begin{aligned}
\max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 \\
\text{s.a} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_5 &\le 4\,000 \\
3x_2 \qquad\quad + 2x_4 + x_5 &\le 6\,000 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad - 3x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \\
x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)
\end{aligned}
$$

La solución óptima es $z = 172\,666.667$, $x_1 = 11\,333.333$ oz, $x_2 = 666.667$ oz, $x_3 = 16\,000$ oz, $x_4 = 0$ y $x_5 = 4\,000$ lb. Por consiguiente, Rylon debe comprar las 4 000 lb de materia prima disponible y producir 11 333. 333 oz de Brute regular, 666.667 oz de Luxury Brute y 16 000 oz de Chanelle regular. Este plan de producción contribuirá con 172 666.667 dólares a las utilidades de Rylon. En este problema, una cantidad fraccionaria de onzas es razonable, por lo que se cumple la Suposición de divisibilidad.

Para terminar el análisis del problema de Nylon, se estudia un error muy común entre los estudiantes. El razonamiento de algunos es

1 lb de materia prima = 3 oz de Brute + 4 oz de Chanelle

Como $x_1 + x_2$ = total de oz de Brute producidas, y $x_3 + x_4$ = total de onzas de Chanelle producidas, los estudiantes concluyen que

$$x_5 = 3(x_1 + x_2) + 4(x_3 + x_4) \tag{59}$$

Esta ecuación podría tener sentido como un enunciado para un programa de computadora; en cierto sentido, la variable x_5 es reemplazada por el segundo miembro de (59). Pero como restricción de PL, (59) no tiene sentido. Para entender mejor esto, nótese que el primer miembro tiene las unidades "libras de materia prima" y el término $3x_1$ en el segundo miembro tiene las unidades

$$\left(\frac{\text{Onzas de Brute}}{\text{libras de materia prima}}\right)(\text{onzas de Brute})$$

Como algunos de los términos no tienen las mismas unidades, (59) no puede ser correcta. *Si hay dudas respecto a una restricción, entonces verifique que todos los términos de la restricción tienen las mismas unidades.* Así se evitarán muchos errores en el planteamiento. (Naturalmente, incluso si las unidades de ambos miembros de la restricción son iguales, ésta podría ser incorrecta.)

PROBLEMAS

Grupo A

1 Sunco Oil tiene tres procesos distintos que se pueden aplicar para elaborar varios tipos de gasolina. En cada proceso se requiere mezclar crudos en el desintegrador catalítico de la compañía. Ejecutar el proceso 1 durante una hora cuesta 5 dólares y se requieren 2 barriles de crudo 1 y 3 barriles de crudo 2. El producto luego de ejecutar el proceso 1 por una hora es 2 barriles de gasolina 1 y 1 barril de gasolina 2. Efectuar el proceso 2 durante una hora cuesta 4 dólares y requiere 1 barril de crudo 1 y 3 barriles de crudo 2. El resultado de correr el proceso 2 por una hora es 3 barriles de gasolina 2. Ejecutar el proceso 3 durante una hora cuesta 1 dólar y se requieren 2 barriles de crudo 2 y 3 barriles de gasolina 2. El resultado del proceso 3 luego de una hora es 2 barriles de gasolina 3. Todas las semanas se podrían comprar 200 barriles de crudo 1 a 2 dólares el barril y 300 barriles de crudo 2 a 3 dólares el barril. Toda la gasolina producida se podría vender a los precios siguientes por barril: gasolina 1, 9 dólares; gasolina 2, 10 dólares; gasolina 3, 24 dólares. Plantee un PL cuya solución maximice los ingresos menos costos. Suponga que sólo se dispone cada semana de 100 horas de tiempo en el desintegrador catalítico.

2 Furnco manufactura mesas y sillas. Una mesa requiere 40 pies tablón de madera, en tanto que una silla requiere 30 pies tablón de madera. La madera se podría comprar a un costo de 1 dólar por pie tablón, y hay disponibles 40 000 pies tablón. Se necesitan dos horas de mano de obra calificada para manufacturar una mesa sin acabados o una silla sin acabados. Tres horas más de mano de obra calificada convierten una mesa sin acabados en una ya terminada, y 2 h más en el caso de las sillas. Se puede disponer de un total de 6 000 horas de mano de obra calificada (y ya se pagó por ella). Todos los muebles fabricados se venderán a los siguientes precios unitarios: mesa sin terminar, 70 dólares; mesa acabada, 140 dólares; silla sin terminar, 60 dólares; silla terminada, 110 dólares. Plantee un PL que maximice la contribución a las utilidades por la fabricación de mesas y sillas.

3 Suponga que en el ejemplo 11, 1 lb de materia prima se podría usar para producir 3 oz de Brute, o bien, 4 oz de Chanelle. ¿Cómo se reflejaría esto en la formulación?

4 Chemco elabora tres productos: 1, 2 y 3. Cada libra de materia prima cuesta 25 dólares. Ésta se somete a proceso y rinde 3 oz del producto 1 y 1 oz del producto 2. Cuesta 1 dólar y toma 2 horas de mano de obra procesar cada libra de materia prima. Cada onza de producto 1 se puede usar de tres maneras distintas:

Se puede vender por 10 dólares la onza.

Se puede procesar en 1 oz de producto 2, lo cual requiere 2 h de mano de obra y cuesta 1 dólar.

Se puede procesar en 1 oz del producto 3, para lo cual se requieren 3 h de mano de obra y cuesta 2 dólares.

Cada onza del producto 2 se puede utilizar de dos maneras distintas:

Se puede vender a 20 dólares/oz.

Se puede procesar en 1 oz del producto 3, para lo cual se requiere 1 hr de mano de obra y cuesta 6 dólares.

El producto 3 se vende en 30 dólares la onza. La cantidad máxima de onzas de cada producto que se puede vender se proporciona en la tabla 23. Se dispone de un máximo de 25 000 horas de mano de obra. Determine cómo podría Chemco maximizar las utilidades.

TABLA 23

Producto	Oz
1	5 000
2	5 000
3	3 000

Grupo B

5 Una compañía produce A, B y C, y puede vender estos bienes en cantidades ilimitadas a los siguientes precios unitarios: A, 10 dólares; B, 56 dólares; C, 100 dólares. Producir una unidad de A requiere 1 h. de mano de obra; una unidad de B, 2 h. de mano de obra más 2 unidades de A; y una unidad de C, 3 h. de mano de obra más 1 unidad de B. Cualquier unidad A que se usa para producir B no se puede vender. De igual manera, cualquier unidad de B que se utilice para producir C no se puede vender. Se dispone de un total de 40 h. de mano de obra. Plantee un PL para maximizar los ingresos de la compañía.

6 Daisy Drugs elabora dos fármacos. Los fármacos se producen mediante la mezcla de dos productos químicos: 1 y 2. Por peso, el fármaco 1 debe contener por lo menos 65% del producto químico 1, y el fármaco 2 debe contener por lo menos 55% del producto químico 1. El fármaco 1 se vende a 6 dólares la onza, y el fármaco 2 se vende a 4 dólares la onza. Hay dos procesos distintos para elaborar los productos químicos 1 y 2. Si se ejecuta el proceso 1 por 1 h. se requieren 3 oz de materia prima y 2 h. de mano de obra calificada, y rinde 3 oz de cada producto químico. En cambio, si se ejecuta el proceso 2 durante 1 h. se requieren 2 oz de materia prima y 3 h. de mano de obra calificada, y rinde 3 oz del producto químico 1 y 1 oz del producto químico 2. Hay disponible un total de 120 h. de mano de obra calificada y 100 oz de materia prima. Plantee un PL que pueda utilizarse para maximizar los ingresos de Daisy por las ventas.

7[†] Lizzies's Dairy produce queso crema y queso *cottage*. Se mezclan leche y crema para elaborar estos dos productos. Para producir queso crema y queso *cottage* se utilizan tanto leche entera como leche descremada. La leche entera contiene 60% de grasa, y la leche descremada sólo 30%. La leche que se utiliza para producir queso crema debe contener en promedio 50% de grasa, y la que se usa para el queso *cottage*, 35%. Por lo menos 40% (por peso) de los ingredientes para el queso crema y por lo menos 20% (por peso) de los ingredientes para el queso *cottage* debe ser crema. Tanto el queso *cottage* como el queso crema se elaboran vertiendo leche y crema en la máquina para producir queso. Cuesta 40 centavos procesar una libra de ingredientes para obtener una libra de queso crema. Cuesta 40 centavos producir una libra de queso *cottage*, pero cada libra de ingredientes para este queso rinde 0.9 de queso *cottage* y hay 0.1 de desecho. Se puede producir crema mediante la evaporación de leche entera y descremada. Cuesta 40 centavos evaporar 1 lb de leche entera. Cada libra de leche entera que es evaporada rinde 0.6 lb de crema. Cuesta 40 centavos evaporar 1 lb de leche descremada. Cada libra de leche descremada que es evaporada rinde 0.3 lb de crema. Se podrían enviar todos los días hasta 3 000 lb de ingredientes a la máquina para producir queso. Por lo menos se deben producir al día 1 000 lb de queso *cottage* y 1 000 lb de queso crema. Hasta 1 500 lb de queso crema y 2 000 de queso *cottage* se pueden vender al día. El queso *cottage* se vende a 1.20 dólares la libra y el queso crema a 1.5 dólares la libra. La leche entera se compra a 80 centavos la libra, y la leche descremada a 40 centavos la libra. El evaporador procesa al día cuando mucho 2 000 lb de leche. Formule un PL con la que se pueda maximizar la utilidad diaria.

8 Una compañía manufactura seis productos de la manera siguiente. Cada unidad de materia prima comprada rinde cuatro unidades del producto 1, dos unidades del producto 2 y una unidad del producto tres. Se pueden vender hasta 1 200 unidades del producto 1 y hasta 300 unidades del producto 2. Cada unidad del producto 1 se puede vender o someter a otro proceso. Cada unidad de producto 1 que se procesa rinde 1 unidad del producto 4. La demanda por los productos 3 y 4 es ilimitada. Cada unidad de producto 2 se puede vender o someter a otro proceso. Cada unidad del producto 2 que se somete a otro proceso rinde 0.8 unidades del producto 5 y 0.3 de unidad del producto 6. Se pueden vender hasta 1 000 unidades del producto 5 y hasta 800 unidades del producto 6. Se pueden comprar hasta 3 000 unidades de materia prima a 6 dólares la unidad. Las unidades sobrantes de los productos 5 y 6 se deben destruir. Cuesta 4

[†]Basado en Sullivan y Secrest (1985).

TABLA 24

Producto	Precio de venta (dólares)	Costo de producción (dólares)
1	7	4
2	6	4
3	4	2
4	3	1
5	20	5
6	35	5

dólares destruir cada unidad sobrante del producto 5 y 3 dólares, las del producto 6. El precio de venta por unidad y los costos de producción por cada producto, sin considerar los costos de compra de la materia prima, se proporcionan en la tabla 24. Plantee un PL cuya solución sea un programa de producción que maximice la utilidad.

9 Todas las semanas, Chemco puede comprar cantidades ilimitadas de materia prima a 6 dólares la libra. Cada libra de materia prima comprada se puede usar para elaborar el insumo 1 o el 2. Cada libra de materia prima rinde 2 oz del insumo 1, requiere 2 h. de tiempo de proceso e incurre en costos de proceso por 2 dólares. Cada libra de materia prima rinde 3 oz del insumo 2, requiere 2 h. de tiempo de proceso y sus costos de proceso son de 4 dólares.

Se dispone de dos procesos de producción. El proceso 1 requiere 2 h., 2 oz de insumo 1 y 1 oz del insumo 2. Cuesta 1 dólar ejecutar el proceso 1. Cada vez que el proceso 1 se efectúa, se produce 1 oz del producto A y 1 oz de desecho líquido. Cada vez que el proceso 2 se efectúa, se requieren 3 h. de proceso, 2 oz del insumo 2 y 1 oz del insumo 1. El proceso 2 rinde 1 oz del producto B y 0.8 oz de desecho líquido. Los costos del proceso 2 son 8 dólares.

Chemco puede tirar sus desechos líquidos en el río Port Charles, o bien, usar el desecho para elaborar el producto C o el producto D. De acuerdo con los reglamentos gubernamentales, Chemco tiene permitido derramar al río cuando mucho 1 000 oz a la semana. El costo por producir una onza del producto C es de 4 dólares, y se vende en 11 dólares. Se requiere una hora de tiempo de proceso, 2 oz del insumo 1 y 0.8 oz de desecho líquido para producir una onza del producto C. Cuesta 5 dólares fabricar una unidad del producto D y se vende en 7 dólares. Una hora de tiempo de proceso, 2 oz del insumo 2 y 1.2 oz de desecho líquido es lo que se requiere para fabricar una onza del producto D.

Todas las semanas se venden, cuando mucho, 5 000 oz del producto A y 5 000 oz del producto B, pero la demanda semanal de los productos C y D es ilimitada. El producto A se vende a 18 dólares la onza y cada onza del producto B se vende en 24 dólares. Se dispone cada semana de 6 000 h. de tiempo de proceso. Formule un PL cuya solución le señale a Chemco cómo maximizar las utilidades semanales.

10 LIMECO es propietaria de una calería, y vende seis grados de cal (grados del 1 al 6). El precio de venta por libra se proporciona en la tabla 25. La cal se produce en hornos. Si un horno funciona un turno de 8 horas, las cantidades (en libras) de cada grado de cal que se producen se dan en la tabla 26. Cuesta 150 dólares la operación de un horno durante un turno de 8 h. La fábrica opina que puede vender diario hasta las cantidades (en libras) de cal que se presentan en la tabla 27.

TABLA 25

Grado	1	2	3	4	5	6
precio(dólares)	12	14	10	18	20	25

TABLA 26

Grado	1	2	3	4	5	6
Cantidad producida	2	3	1	1.5	2	3

TABLA 27

Grado	1	2	3	4	5	6
Demanda máxima	20	30	40	35	25	50

La cal que se obtiene del horno se podría volver a procesar por medio de uno de los cinco procesos que se describen en la tabla 28.

Por ejemplo, a un costo de 1 dólar/lb se podría transformar una libra de cal grado 4 en 0.5 de cal grado 5 y 0.5 lb de cal grado 6.

Cualquier sobrante extra de cal se debe desechar al final de cada día de acuerdo con los costos (por libra) proporcionados en la tabla 29.

Formule un PL cuya solución le permita a LIMECO maximizar su utilidad diaria.

11 Chemco elabora tres productos: A, B y C. Puede vender hasta 30 lb de cada producto a los precios siguientes (por libra): producto A, 10 dólares; producto B, 12 dólares; producto C, 20 dólares. Chemco compra materia prima a 5 dólares la libra. Cada libra de materia prima se puede utilizar para elaborar 1 lb de A o 1 lb de B. Por un costo de 3 dólares la libra, el producto A procesado se puede transformar en 0.6 lb de producto B y 0.4 lb de producto C. Por un costo de 2 dólares la libra, el producto B procesado se puede convertir en 0.8 lb de producto C. Plantee un PL cuya solución le permita a Chemco maximizar sus utilidades.

12 Chemco elabora tres productos químicos: B, C y D. Empieza por comprar el producto químico A a un costo de 6 dó-

TABLA 28

Insumo (1 lb)	Producto	Costo (dólares por lb de insumo)
Grado 1	0.3 lb Grado 3	
	0.2 lb Grado 4	2
	0.3 lb Grado 5	
	0.2 lb Grado 6	
Grado 2	1 lb Grado 6	1
Grado 3	0.8 lb Grado 4	1
Grado 4	0.5 lb Grado 5	1
	0.5 lb Grado 6	
Grado 5	0.9 lb Grado 6	2

TABLA 29

Grado	1	2	3	4	5	6
Costo por eliminar sobrantes (dólares)	3	2	3	2	4	2

lares los 100 l. Por un costo extra de 3 dólares y 3 h. de mano de obra calificada, 100 litros de A se transforman en 40 l de C y 60 l de B. El producto químico C se puede vender o someterse a otro proceso. Cuesta 1 dólar y requiere una hora de mano de obra calificada procesar 100 l de C para obtener 60 l de D y 40 l de B. Los precios de venta por cada 100 l y la cantidad máxima (en cientos de litros) que se pueden vender de cada producto químico se dan en la tabla 30.

Se dispone de un máximo de 200 horas de mano de obra. Plantee un PL con la que Chemco maximice su utilidad.

13 Carrington Oil produce dos tipos de gasolina, la 1 y la 2, a partir de dos tipos de crudo, el crudo 1 y el 2. La gasolina 1 puede contener hasta 4% de impurezas, en tanto que la 2 puede tener hasta 3%. La gasolina 1 se vende en 8 dólares el barril y la 2 se vende a 12 dólares el barril. Se pueden vender de la gasolina 1 hasta 4 200 barriles, y de la 2, hasta 4 300. El costo por barril de cada crudo, la disponibilidad y la concentración de impurezas en cada crudo se proporciona en la tabla 31. Antes de mezclar los crudos para obtener gasolina es posible "purificar" cada uno de ellos a un costo de 0.50 dólares el barril. La purificación elimina la mitad de las impurezas del petróleo crudo. Determine cómo maximizar las utilidades.

14 Usted ha sido designado administrador de la refinería de Melrose. Esta refinería produce gasolina y aceite combustible a partir del petróleo crudo. La gasolina se vende a 8 dólares el barril, y debe tener un "grado" promedio de por lo menos 9. El aceite combustible se vende a 6 dólares el barril y debe tener un "grado" de por lo menos 7. Se pueden vender, cuando mucho, 2 000 barriles de gasolina y 600 barriles de aceite combustible. El crudo que está por llegar puede ser procesado por medio de uno de tres métodos distintos. El rendimiento por barril y el costo por barril de cada método de proceso se proporcionan en la tabla 32. Por ejemplo, si se refina un barril del crudo que llega por el método 1, cuesta 3.40 dólares y da un rendimiento de 0.2 de barril de grado 6, 0.2 de barril de grado 8 y 0.6 de barril de grado 10.

Antes de ser procesado para obtener gasolina y aceite combustible, los grados 6 y 8 podrían enviarse al desintegrador catalítico para mejorar su calidad. Por 1.30 dólares el barril, un barril de grado 6 puede ser fraccionado en 1 barril de grado 8. Por 2 dólares el barril, un barril de grado 8 se fracciona en un barril de grado 10. Cualquier crudo excedente, procesado o fraccionado, que ya no se pueda utilizar para aceite combustible o gasolina, se debe desechar a un costo de 0.20 de dólar por barril. Determine cómo maximizar la utilidad de la refinería.

TABLA 30

[illegible]	B	C	D
Precio (dólares)	12	16	26
Demanda máxima	30	60	40

TABLA 31

Petróleo crudo	Costo por barril (dólares)	Grado de impurezas (%)	Disponibilidad (barriles)
Crudo 1	6	10%	5 000
Crudo 2	8	2%	4 500

TABLA 32

Método	Grado 6	Grado 8	Grado 10	Costo (dólares)
1	0.2	0.2	0.6	3.40
2	0.3	0.3	0.4	3.00
3	0.4	0.4	0.2	2.60

3.10 Solución de problemas de decisión de periodos múltiples mediante programación lineal: un modelo de inventario

Hasta este punto, todos los planteamientos de PL que se han estudiado son ejemplos de *modelos estáticos o para un solo periodo*. En un modelo estático se supone que todas las decisiones se toman en un solo punto en el tiempo. El resto de ejemplos en este capítulo ilustran cómo la programación lineal se usa para determinar decisiones óptimas en **modelos para periodos múltiples o modelos dinámicos.** Los modelos dinámicos surgen cuando se toma una decisión en más de un punto en el tiempo. Las decisiones tomadas durante el periodo actual influyen en las decisiones tomadas durante periodos futuros cuando se aplican modelos dinámicos. Por ejemplo, considérese una compañía que debe determinar cuántas unidades de un producto se deben producir cada mes. Si fabrica una gran cantidad de unidades durante un presente mes, entonces se reducirían las unidades que se deben producir en los meses futuros. Los ejemplos que se estudian en las secciones 3.10 a 3.12 muestran cómo las decisiones más tempranas afectan las decisiones posteriores. Se volverán a tratar los modelos dinámicos de decisión cuando se estudie la programación dinámica en los capítulos 18 y 19.

EJEMPLO 14 Inventario de Sailco

Sailco Corporation debe determinar cuántos botes de vela tiene que producir cada mes durante los cuatro trimestres. La demanda durante cada uno de los siguientes cuatro trimestres es como sigue: primer trimestre, 40 botes de vela; segundo trimestre, 60; tercer trimestre, 75; cuarto trimestre, 25. Sailco debe cumplir con la demanda a tiempo. A principios del primer trimestre tenía un inventario de 10 botes de vela. Al empezar cada trimestre, Sailco debe decidir cuántos botes debe producir durante el trimestre. Con el fin de simplificar los cálculos, se supone que los botes de vela fabricados durante un trimestre, se usan para cumplir con la demanda de ese trimestre. Durante cada trimestre, Sailco fabrica hasta 40 botes de vela con mano de obra en turno regular con un costo total de 400 dólares por bote de vela. Si tiene empleados que trabajen tiempo extra durante un trimestre, Sailco manufactura más botes de vela con mano de obra de tiempo extra a un costo total de 450 dólares por bote de vela

Al final de cada trimestre (después de producir los botes y cumplir la demanda del presente trimestre) se incurre en un costo de 20 dólares por el transporte o por almacenamiento. Utilice la programación lineal para determinar un calendario de producción con el fin de minimizar la suma de costos de producción y de inventario durante los siguientes cuatro trimestres.

Solución Sailco tiene que determinar para cada trimestre la cantidad de botes de vela que debe fabricar con mano de obra en horarios regulares y con tiempo extra. Por consiguiente, se definen las siguientes variables de decisión:

x_t = número de botes de vela fabricados con mano de obra en horario regular (a 400 dólares/bote) durante el trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

y_t = número de botes de vela fabricados con mano de obra en tiempo extra (a 450 dólares/bote) durante el trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

Es conveniente definir las variables de decisión para el inventario (número de botes de vela en existencia) al final de cada trimestre:

i_t = número de botes de vela en existencia al final del trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

Costo total de Sailco se podría determinar a partir de

$$
\begin{aligned}
\text{Costo total} &= \text{costo por producir botes de vela en horario regular} \\
&\quad + \text{costos por producir botes de vela en tiempo extra} + \text{costos por inventario} \\
&= 400(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 450(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\
&\quad + 20(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función objetivo de Sailco es

$$
\begin{aligned}
\min z &= 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 \\
&\quad + 450y_3 + 450y_4 + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4
\end{aligned} \tag{60}
$$

Antes de determinar las restricciones de Sailco hay dos observaciones por hacer que ayudarán a plantear los modelos de programación de la producción en varios periodos.

Para el trimestre t,

Inventario al final del trimestre t = inventario al final del trimestre $(t - 1)$ + producción del trimestre t − demanda del trimestre t

Esta relación tiene un papel importante en el planteamiento de todos los modelos para programar la producción en varios periodos. Si d_t es la demanda durante el periodo t (entonces, $d_1 = 40$, $d_2 = 60$, $d_3 = 75$ y $d_4 = 25$), esta observación se podría expresar en la forma compacta siguiente:

$$i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \qquad (t = 1, 2, 3, 4) \tag{61}$$

En (61), i_0 = inventario al final del trimestre 0 = inventario al inicio del trimestre 1 = 10. Por ejemplo, si hay 20 botes de vela en existencia al final del trimestre 2 ($i_2 = 20$) y se fabricaron 65 durante el trimestre 3 (esto quiere decir que $x_3 + y_3 = 65$), ¿cuál sería el inventario al final del tercer trimestre? Simplemente la cantidad de botes de vela en existencia al final del trimestre 2 más los botes de vela fabricados durante el trimestre 3, menos la demanda del trimestre 3, que es de 75. En este caso, $i_3 = 20 + 65 - 75 = 10$, lo cual está de acuerdo con (61). La ecuación (61) relaciona las variables de decisión que tienen que ver con periodos diferentes. Al plantear cualquier modelo de PL de varios periodos, el paso más difícil es, por lo regular, encontrar la relación (como [61]) que vincula las variables de decisión de periodos distintos.

También se observa que la demanda del trimestre t' se cumplirá a tiempo si y sólo si (algunas veces se denota con *sí*) $i_t \geq 0$. Para comprender mejor esto, observe que $i_{t-1} + (x_t + y_t)$ es la existencia para cumplir la demanda del periodo t, por lo que la demanda del periodo t se cumplirá si y sólo si

$$i_{t-1} + (x_t + y_t) \geq d_t \qquad \text{o bien} \qquad i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \geq 0$$

Esto significa que las restricciones de signo $i_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4$) aseguran que la demanda de cada trimestre se cumplirá a tiempo.

Ahora ya se pueden determinar las limitaciones de Sailco. Primero, se usan las cuatro limitaciones siguientes para tener la seguridad de que la producción en los horarios regulares de cada periodo no excederá 40: $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40$. Luego se añaden las limitaciones de la forma (61) por cada periodo ($t = 1, 2, 3, 4$). Con esto se generan las cuatro restricciones siguientes:

$$i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40 \qquad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60$$
$$i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75 \qquad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25$$

Luego de añadir las restricciones de signo $x_t \geq 0$ (para evitar los niveles de producción negativos) e $i_t \geq 0$ (para tener la seguridad de que la demanda de cada periodo se cumple a tiempo) se obtiene el planteamiento siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 \\
& + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4 \\
\text{s.a} \quad & x_1 \leq 40, \quad x_2 \leq 40, \quad x_3 \leq 40, \quad x_4 \leq 40 \\
& i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40, \quad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60 \\
& i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75, \quad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25 \\
& i_t \geq 0, \quad y_t \geq 0, \quad \text{y} \quad x_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

La solución óptima para este problema es $z = 78\,450$; $x_1 = x_2 = x_3 = 40$; $x_4 = 25$; $y_1 = 0$; $y_2 = 10$; $y_3 = 35$; $y_4 = 0$; $i_1 = 10$; $i_2 = i_3 = i_4 = 0$. Por lo tanto, el costo mínimo total que Sailco tendría es 78 450 dólares. Para lograrlo, Sailco debe fabricar 40 botes de vela en el horario regular durante los trimestres 1 a 3, y 25 botes de vela con mano de obra en el horario regular durante el trimestre 4. Sailco también debe producir 10 botes con tiempo extra durante el trimestre 2 y 35 botes con tiempo extra durante el trimestre 3. Los costos por inventario se generan sólo durante el trimestre 1.

Algunos estudiantes podrían estar preocupados porque este planteamiento permite a Sailco producir con tiempo extra durante el trimestre t incluso si la producción regular del periodo t es menor de 40. Cierto; este planteamiento no hace factible a tal programa, pero cualquier plan de producción que tenga $y_t > 0$ y $x_t < 40$ podría no ser óptimo. Por ejemplo, considere los dos planes de producción siguientes:

$$\begin{aligned}
&\text{Plan de producción A} = x_1 = x_2 = x_3 = 40; \quad x_4 = 25; \\
&\qquad y_2 = 10; \quad y_3 = 25; \quad y_4 = 0 \\
&\text{Plan de producción B} = x_1 = 40; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 30; \quad x_4 = 25; \\
&\qquad y_2 = 20; \quad y_3 = 35; \quad y_4 = 0
\end{aligned}$$

Los programas A y B tienen el mismo nivel de producción durante cada periodo. Lo anterior significa que ambos programas tendrán costos por inventario idénticos. Asimismo, ambos planes son factibles, pero el programa B incurre en más costos de tiempo extra que el programa A. Por lo tanto, en cuestiones de minimización de costos, el programa B (o cualquier otro que tenga $y_t > 0$ y $x_t < 40$) nunca se escogería.

En realidad, un PL como el del ejemplo 14 se podría poner en marcha usando un **horizonte de planeación rodante**, el cual funciona de la siguiente manera. Después de resolver el ejemplo 14, Sailco pondría en marcha sólo la estrategia de producción del trimestre 1 (producir 40 botes en el tiempo de horario regular). Luego, la compañía consideraría la demanda actual del trimestre 1. Suponga que la demanda actual del trimestre 1 es 35 botes. Entonces, el trimestre 2 empieza con un inventario de $10 + 40 - 35 = 15$ botes de vela. Luego se hace un pronóstico para la demanda del trimestre 5 (suponga que el pronóstico es 36). Después se determina la producción para el trimestre 2 mediante la solución de un PL en el cual el trimestre 2 es el primer trimestre, el trimestre 5 es el trimestre final y el inventario de inicio es 15 botes. Entonces, la producción del trimestre 2 se determinaría al resolver el PL siguiente:

$$\min z = 400(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 450(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 20(i_2 + i_3 + i_4 + i_5)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & x_2 \le 40, \quad x_3 \le 40, \quad x_4 \le 40, \quad x_5 \le 40 \\
& i_2 = 15 + x_2 + y_2 - 60, \quad i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75 \\
& i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25, \quad i_5 = i_4 + x_5 + y_5 - 36 \\
& i_t \ge 0, \quad y_t \ge 0, \quad \text{y} \quad x_t \ge 0 \quad (t = 2, 3, 4, 5)
\end{aligned}$$

Aquí, x_5 = la producción en horario regular del trimestre 5, y_5 = producción en tiempo extra del trimestre 5 e i_5 = inventario al finalizar el trimestre 5. Los valores óptimos de x_2 y y_2 para este PL se utilizan después para determinar la producción del trimestre 2. Por lo tanto, en cada trimestre, se resuelve una PL (con un horizonte de planeación de cuatro trimestres) para determinar la producción del trimestre actual. Se considera luego la demanda actual, se pronostica la demanda para los siguientes cuatro trimestres, y se repite el proceso. Esta técnica del "horizonte de planeación rodante" es el método mediante el cual la mayor parte de los modelos de PL dinámicos o para periodos múltiples se aplica al mundo real.

Esta formulación del problema de Sailco tiene todavía otras limitaciones.

1 El costo de producción podría no ser una función lineal de la cantidad producida, lo cual violaría la Suposición de proporcionalidad. Se analiza cómo tratar este problema en los capítulos 9 y 13.

2 Las demandas futuras podrían no conocerse con certeza. En esta situación se incumple la Suposición de certidumbre.

3 Se le ha exigido a Sailco que cumpla todas las demandas a tiempo. Es común que las compañías cumplan con la demanda a tiempo después, pero se les impone un costo de penalización por los pedidos que no se entregan a tiempo. Por ejemplo, si la demanda no se cumple a tiempo, entonces el disgusto del cliente se podría reflejar en una pérdida de ingresos futuros. Si la demanda se cumple en periodos posteriores, entonces se dice que **está acumulada o que está pendiente.** El planteamiento de PL actual tiene la capacidad de poder ser modificado para incorporar los pedidos pendientes (véase problema 1 de la sección 4.12).

4 Se ha ignorado el hecho de que las variaciones trimestre-a-trimestre en la cantidad producida podrían dar como resultado costos extra (llamados **costos por suavización de la producción**). Por ejemplo, si se incrementa la producción en forma notable desde un trimestre al siguiente, esto requerirá probablemente la costosa capacitación de nuevos trabajadores. Por otro lado, si la producción disminuye en forma importante de un trimestre al siguiente, se podría incurrir en costos extra que son resultado de despedir a los trabajadores. En la sección 4.12 se modifica el modelo presente para explicar los costos de suavización.

5 Si algunos botes de vela se quedan al final del último trimestre, se les asigna un valor de cero. Por supuesto que esto es irreal. En cualquier modelo de inventario con un horizonte finito, el inventario que se queda al final del último periodo debe tener un **valor de salvamento** que señala el valor del inventario al final del periodo. Por ejemplo, si Sailco siente que cada bote de vela dejado al final del trimestre 4 vale 400 dólares, entonces se debe añadir un término $-400i_4$ (que mide el valor del inventario del trimestre 4) a la función objetivo.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un cliente requiere respectivamente durante los siguientes cuatro meses 50, 65, 100 y 70 unidades de un producto (no se permite acumulación). Los costos de producción son 5, 8, 4 y 7 dólares por unidad durante estos meses. Los costos por conservar almacenadas las unidades de un mes al siguiente es 2 dólares por unidad (impuestos sobre el inventario final). Se estima que cada unidad en existencia al final del mes 4 se podría vender en 6 dólares. Plantee un PL que minimice el costo neto incurrido para poder cumplir con las demandas de los cuatro meses siguientes.

2 Una compañía tiene las siguientes demandas durante los siguientes tres periodos: periodo 1, 20 unidades; periodo 2, 10 unidades; periodo 3, 15 unidades. Los costos de producción por unidad durante cada periodo son como se indica: periodo 1, 13 dólares; periodo 2, 14 dólares; periodo 3, 15 dólares. Un costo por almacenamiento durante un corto plazo por unidad se aplica al inventario al finalizar cada periodo. Al empezar el periodo 1, la compañía tiene 5 unidades en existencia.

En realidad, de los bienes producidos durante un mes no todos se usan para cumplir la demanda del mes actual. Para modelar este hecho, se supone que sólo la mitad de los bienes producidos en un periodo se utilizan para cumplir con la demanda del periodo actual. Plantee un PL para minimizar el costo por cumplir con la demanda de los siguientes tres periodos. (*Sugerencia*: Limitaciones como $i_1 = x_1 + 5 - 20$ son ciertamente necesarias. De una manera diferente al ejemplo, la restricción $i_1 \geq 0$ no asegurará que se cumpla la demanda del periodo 1. Por ejemplo, si $x_1 = 20$, entonces se cumple $i_1 \geq 0$ pero sólo porque $\frac{1}{2}(20) = 10$ unidades del periodo 1 se pueden usar para cumplir con la demanda del periodo 1, $x_1 = 20$ no sería factible. Intente pensar en un tipo de restricción que asegure que lo que está en existencia para cumplir la demanda de cada periodo es por lo menos igual a la demanda del periodo.)

Grupo B

3 James Beerd hornea pasteles de queso y pasteles de la Selva Negra. Durante cualquier mes puede hornear cuando mucho 65 pasteles. Los costos por pastel y la demanda de pasteles, la cual se debe cumplir a tiempo, se proporcionan en la tabla 33. Cuesta 50 centavos conservar un pastel de queso y 40 centavos conservar un pastel de la Selva Negra en inventario por un mes. Plantee un PL para minimizar el costo total por cumplir la demanda de los tres meses siguientes.

4 Una compañía manufacturera produce dos tipos de productos: A y B. La compañía está de acuerdo en entregar los productos según el calendario de la tabla 34. La compañía tiene dos líneas de ensamble, la 1 y la 2 con las horas de producción disponibles mostradas en la tabla 35. La producción en cada línea de ensamble y combinación de productos, en términos de horas por producto, están en la tabla 36. Toma 0.15 h fabricar una unidad del producto A en la línea 1, y así sucesivamente. Producir cualquier producto cuesta 5 dólares por hora de tiempo de línea. El costo por mes de llevar el inventario de cada producto es 20 centavos por unidad (cargado en el inventario al finalizar cada mes). En la actualidad hay 500 unidades de A y 750 de B en inventario. A la gerencia le gustaría tener en inventario al final de abril por lo menos 1 000 unidades de cada producto. Plantee un PL para determinar el programa de producción que minimice el total de los costos por cumplir con la demanda a tiempo.

5 Durante los dos meses siguientes, General Cars debe cumplir (a tiempo) con las siguientes demandas de camiones y automóviles: mes 1, 400 camiones, 800 automóviles; mes 2, 300 camiones, 300 automóviles. Durante cada mes, se fabrican cuando mucho 1 000 vehículos. Para cada camión se utilizan 2 toneladas de acero y cada automóvil requiere 1 tonelada del mismo material. En el mes 1, la tonelada de acero cuesta 400 dólares; durante el mes 2, la tonelada cuesta 600 dólares. Cuando mucho se pueden comprar cada mes

TABLA 34

Fecha	A	B
31 de marzo	5 000	2 000
30 de abril	8 000	4 000

TABLA 35

	horas de producto disponibles	
Mes	Línea 1	Línea 2
Marzo	800	2 000
Abril	400	1 200

TABLA 36

	Tasa de producción	
Producto	Línea 1	Línea 2
A	0.15	0.16
B	0.12	0.14

TABLA 33

	Mes 1		Mes 2		Mes 3	
Producto	Demanda	Costo/pastel (dólares)	Demanda	Costo/pastel (dólares)	Demanda	Costo/pastel (dólares)
Pastel de queso	40	3.00	30	3.40	20	3.80
Selva Negra	20	2.50	30	2.80	10	3.40

1 500 toneladas de acero (sólo se puede usar el acero durante el mes en que se compró. Al principio del mes hay en el inventario 1 100 camiones y 200 automóviles. Al final de cada mes se impone un costo por guardar los vehículos de 150 dólares por unidad. Cada automóvil da 20 millas por galón, y cada camión, 10 millas por galón. Durante cada mes, los vehículos que produce la compañía deben promediar por lo menos 16 millas por galón. Plantee un PL para cumplir con la demanda y las millas al mínimo costo (sin olvidar los costos del acero y los costos por guardar los vehículos).

6 Gandhi Clothing Company fabrica camisetas y pantalones. Cada camiseta requiere 2 yardas cuadradas de tela, y cada pantalón, 3. Durante los dos meses siguientes se debe cumplir (justo a tiempo) con la demanda de camisetas y pantalones, que es la siguiente: mes 1, 10 camisetas, 15 pantalones; mes 2, 12 camisetas, 14 pantalones. Durante cada mes se dispone de los recursos siguientes: mes 1, 90 yardas cuadradas de tela; mes 2, 60 yardas cuadradas. (La tela que hay en existencia durante el mes 1 se podría usar en el mes 2, si no se utiliza en el mes 1.)

Durante cada mes cuesta 4 dólares elaborar un artículo de vestir en el horario regular de trabajo, y 8 dólares si se utiliza el tiempo extra. Cada mes se podría producir cuando mucho un total de 25 prendas de vestir en el horario regular de trabajo, y una cantidad ilimitada de artículos si se aplica el tiempo extra. Al final de cada mes, se fija un costo por conservar los artículos de 3 dólares por unidad. Formule un PL mediante la cual se cumplan las demandas para los dos meses siguientes (a tiempo) con el costo mínimo. Suponga que al inicio del mes 1, hay en existencia una camiseta y 2 pantalones.

7 Paynothing Shoes tiene cada año una demanda (que se debe entregar a tiempo) de pares de zapatos según la tabla 37. Los empleados trabajan tres trimestres consecutivos y luego descansan uno. Por ejemplo, un empleado podría trabajar durante los trimestres 3 y 4 de un año y el trimestre 1 del siguiente año. Durante un trimestre en el cual el empleado trabaja, éste tiene que producir hasta 50 pares de zapatos. Cada empleado recibe un pago de 500 dólares por el trimestre. Al final de cada trimestre, se fija un costo por conservar los zapatos de 50 dólares por cada par. Formule un PL que se pueda utilizar para minimizar los costos por año (mano de obra + costo por guardar los zapatos) por cumplir con las demandas de zapatos. Con el fin de simplificar, suponga que al final de cada año, el inventario final es cero. (*Sugerencia*: Se permite suponer que un empleado dado tomará de descanso el mismo trimestre cada año.)

TABLA 37

Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
600	300	800	100

8 Una compañía debe cumplir (justo a tiempo) con la demanda siguiente: trimestre 1, 30 unidades; trimestre 2, 20 unidades; trimestre 3, 40 unidades. Se pueden producir cada trimestre hasta 27 unidades con trabajo en el horario regular, a un costo de 40 dólares por unidad. Durante cada trimestre es posible fabricar una cantidad ilimitada de unidades si se usa tiempo extra, a un costo de 60 dólares por mes. De todas las unidades producidas, 20% es defectuosa y no se pueden usar para cumplir con la demanda. Por otro lado, al final de cada trimestre, se daña 10% de las unidades en existencia y tampoco se pueden usar para cumplir alguna demanda futura. Después de que se cumple con la demanda de cada trimestre y se explica el daño, se fija un costo por unidad de 15 dólares contra el inventario al finalizar el trimestre. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo total por cumplir con la demanda en los tres trimestres siguientes. Suponga que hay en existencia 20 unidades útiles, al principio del trimestre 1.

9 Donovan Enterprises fabrica licuadoras. Durante los cuatro trimestres siguientes se tiene que cumplir (a tiempo) con la siguiente demanda de licuadoras: trimestre 1, 4 000; trimestre 2, 2 000; trimestre 3, 3 000; trimestre 4, 10 000. Cada empleado de Donovan trabaja tres trimestres del año y tiene un trimestre libre. Por consiguiente, un empleado podría trabajar durante los trimestres 1, 2 y 4, y tener libre el trimestre 3. Cada empleado recibe un salario de 30 000 dólares al año, y (si trabaja) produce hasta 500 licuadoras en un trimestre. Al final de cada trimestre, Donovan incurre en un costo por guardar los artículos de 30 dólares por unidad sobre cada licuadora en inventario. Plantee un PL para ayudar a Donovan a minimizar los costos (mano de obra e inventario) en el cumplimiento (a tiempo) de la demanda del año próximo. Hay en existencia 600 licuadoras a principios del trimestre 1.

3.11 Modelos financieros para periodos múltiples

Mediante el siguiente ejemplo se ilustra cómo la programación lineal se puede aplicar para modelar problemas de administración de efectivo en varios periodos. La clave es determinar las relaciones del efectivo disponible durante periodos distintos.

EJEMPLO 15 Inversión en varios periodos de Finco

Finco Investment Corporation debe establecer la estrategia de inversiones para la compañía durante los siguientes tres años. En la actualidad (tiempo 0), hay 100 000 dólares disponibles para invertir en A, B, C, D y E. El flujo de efectivo relacionado con la inversión de 1 dólar en cada opción se da en la tabla 38.

Por ejemplo, un dólar invertido en la opción B, requiere una salida de efectivo en el tiempo 1, y da un rendimiento de 50 centavos en el tiempo 2 y un dólar en el tiempo 3. Para estar segura de que las opciones de inversión de la compañía son diversificadas, Finco

TABLA 38

	Flujo de efectivo (dólares) en el tiempo*			
	0	1	2	3
A	−1	+0.50	+1	0
B	0	−1	+0.50	+1
C	−1	+1.2	0	0
D	−1	0	0	+1.9
E	0	0	−1	+1.5

*Nota: Tiempo 0 = presente, tiempo 1 = 1 un año a partir de ahora; tiempo 2 = 2 años a partir de ahora; tiempo 3 = 3 años a partir de ahora.

requiere que se asignen cuando mucho 75 000 dólares a cualquier inversión. Además de las inversiones A a E, Finco puede ganar intereses de 8% al año por mantener el efectivo sin invertir en fondos del mercado de valores. El rendimiento de las inversiones se puede volver a invertir en forma inmediata. Por ejemplo, el flujo de efectivo positivo recibido de la inversión C en el tiempo 1 podría ser reinvertido inmediatamente en la opción B. Finco no puede pedir fondos prestados, así que el efectivo disponible para inversión en cualquier tiempo está limitado al efectivo disponible. Plantee un PL que maximizará el efectivo disponible en el tiempo 3.

Solución Finco debe decidir cuánto dinero debe ser asignado a cada inversión (sin olvidar los fondos del mercado de valores). Por consiguiente, se definen las variables de decisión siguientes:

A = dólares invertidos en la opción A

B = dólares invertidos en la opción B

C = dólares invertidos en la opción C

D = dólares invertidos en la opción D

E = dólares invertidos en la opción E

S_t = dólares invertidos en fondos del mercado de valores t $(t = 0, 1, 2)$

Finco desea maximizar el efectivo disponible en el tiempo 3. En el tiempo 3, el efectivo disponible de Finco será la suma de todo el efectivo que entra en el tiempo 3. A partir de la descripción de las inversiones A a E, y el hecho de que desde el tiempo 2 al tiempo 3, S_2 se incrementará a $1.08S_2$,

$$\text{Efectivo disponible en el tiempo} = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2$$

Por consiguiente, la función objetivo de Finco es

$$\max z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 \tag{62}$$

En los modelos financieros de varios periodos, se usa por lo regular el tipo siguiente de restricciones para relacionar las variables de decisión de periodos distintos:

Efectivo disponible en el tiempo t = efectivo invertido en el tiempo t
+ efectivo sin invertir en el tiempo t que se traspasa al tiempo $t + 1$

Si se clasificaran los fondos del mercado de valores como inversiones, se observa que

$$\text{Efectivo disponible en el tiempo } t = \text{efectivo invertido en el tiempo } t \tag{63}$$

Como las inversiones A, C, D y S_0 están disponibles en el tiempo 0, y 100 000 dólares están disponibles en el tiempo 0, (63) se vuelve en el tiempo 0

$$100\,000 = A + C + D + S_0 \tag{64}$$

En el tiempo 1, está disponible 1, $0.5A + 1.2C + 1.08S_0$ para ser invertido, y las opciones B y S_1 están disponibles. Entonces, para $t = 1$, (63) se convierte en

$$0.5A + 1.2C + 1.08S_0 = B + S_1 \quad (65)$$

En el tiempo 2, está disponible para ser invertida la cantidad de $A + 0.5B + 1.08S_1$, y están disponibles las opciones E y S_2 Por lo tanto, para $t = 2$, (63) se reduce a

$$A + 0.5B + 1.08S_1 = E + S_2 \quad (66)$$

No hay que olvidar que cuando mucho se pueden invertir 75 000 dólares en cualquiera de las opciones A a E. Para poner atención en esto, se suman las restricciones siguientes

$$A \leq 75\,000 \quad (67)$$

$$B \leq 75\,000 \quad (68)$$

$$C \leq 75\,000 \quad (69)$$

$$D \leq 75\,000 \quad (70)$$

$$E \leq 75\,000 \quad (71)$$

Cuando se combinan (62) y (64) a (71) con las restricciones de signo (todas las variables ≥ 0) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 \\
\text{s.a} \quad A + C + D + S_0 = 100\,000 \\
0.5A + 1.2C + 1.08S_0 = B + S_1 \\
A + 0.5B + 1.08S_1 = E + S_2 \\
A \leq 75\,000 \\
B \leq 75\,000 \\
C \leq 75\,000 \\
D \leq 75\,000 \\
E \leq 75\,000 \\
A, B, C, D, E, S_0, S_1, S_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Y, entonces, la solución óptima es $z = 218\,500$, $A = 60\,000$, $B = 30\,000$, $D = 40\,000$, $E = 75\,000$, $C = S_0 = S_1 = S_2 = 0$. Finco no debe invertir en fondos del mercado de valores. En el tiempo 0, Finco debe invertir 60 000 dólares en A y 40 000 en D. Luego, en el tiempo 1, la entrada de efectivo de 30 000 dólares de A se debe invertir en B. Por último, en el tiempo 2, la entrada de efectivo de 60 000 dólares de A y la entrada de efectivo de 15 000 dólares de B se deben invertir en E. En el tiempo 3, los 100 000 dólares de Finco habrán aumentado a 218 500 dólares.

Usted se podrá preguntar cómo este planteamiento asegura que Finco nunca invierte más dinero en cualquier tiempo que el que la compañía tiene disponible. Lo anterior lo asegura el hecho de que cada variable S_i debe ser no negativa. Por ejemplo, $S_0 \geq 0$ es equivalente a $100\,000 - A - C - D \geq 0$, lo cual asegura que cuando mucho 100 000 dólares se invertirán en el tiempo 0.

Aplicación en la vida cotidiana

Uso de la PL para optimizar las opciones de inversión en bonos

Muchas empresas de Wall Street compran y venden bonos. Rohn (1987) analiza un modelo de selección de bonos que maximiza la utilidad de las compras y ventas de bonos sujetas a restricciones que minimizan la exposición de la firma al riesgo. Una versión simplificada de este modelo se encuentra en el problema 4.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un asesor de Finco afirma que el efectivo disponible de Finco en el tiempo 3 es la suma de las entradas de efectivo provenientes de todas las inversiones, y no sólo de las inversiones que generan entrada de efectivo en el tiempo 3. Por consiguiente, el asesor afirma que la función objetivo debe ser

$$\max z = 1.5A + 1.5B + 1.2C + 1.9D + 1.5E + 1.08S_0 + 1.08S_1 + 1.08S_2$$

Explique por qué el asesor no está en lo correcto.

2 Demuestre que la función objetivo de Finco se podría escribir también como

$$\max z = 100\,000 + 0.5A + 0.5B + 0.2C + 0.9D + 0.5E + 0.08S_0 + 0.08S_1 + 0.08S_2$$

3 Hay 10 000 dólares en el tiempo 0. Están las opciones de inversión A y B; sus flujos de efectivo se proporcionan en la tabla 39. Suponga que *sólo* el dinero invertido en A o en B gana interés. Plantee un PL que maximice el efectivo disponible en el tiempo 3. ¿Puede adivinar la solución óptima de este problema?

TABLA 41

Año	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4
1	100	80	70	60
2	110	90	80	50
3	1 100	1 120	1 090	1 110

TABLA 42

Mes	Flujo de efectivo	Mes	Flujo de efectivo
Enero	−12	Julio	−7
Febrero	−10	Agosto	−2
Marzo	−8	Septiembre	15
Abril	−10	Octubre	12
Mayo	−4	Noviembre	−7
Junio	5	Diciembre	45

Grupo B

4[†] El corredor Steve Johnson trata en la actualidad de maximizar sus utilidades en el mercado de bonos. Están disponibles cuatro bonos para compra y venta, con el precio de oferta (o de compra) y el precio inicial (o de venta) de cada bono que se muestra en la tabla 40. Steve puede comprar hasta 1 000 unidades de cada bono al precio de venta, o vender hasta 1 000 unidades de cada bono al precio de compra. Durante cada uno de los siguientes tres años, la persona que vende un bono pagará al dueño del bono el pago en efectivo que se da en la tabla 41.

La meta de Steve es maximizar sus ingresos a partir de la venta de bonos menos el pago por la compra de bonos, con la restricción de que después de que se reciben los pagos de cada año, su estado de caja (debido sólo a pagos en efectivo provenientes de bonos y no a compras o ventas de bonos) es no negativo. Suponga que los pagos en efectivo son descontados, con un pago de un dólar un año a partir de ahora siendo equivalente a un pago de 90 centavos de ahora. Plantee un PL para maximizar las utilidades netas por la compra y venta de bonos, sujeto a las restricciones de arbitraje ya descritas. ¿Por qué cree que limitamos el número de unidades de cada bono que puede ser comprada o vendida?

TABLA 39

Tiempo	A	B
0	−\$1	\$0
1	\$0.2	−\$1
2	\$1.5	\$0
3	\$0	\$1.0

TABLA 40

Bono	Precio de compra	Precio de venta
1	980	990
2	970	985
3	960	972
4	940	954

[†]Basado en Rohn (1987).

5 Una pequeña tienda de juguetes, Toyco, proyecta los flujos de efectivo mensuales (en miles de dólares) durante el año 2003 en la tabla 42. Un flujo de efectivo negativo significa que la salida de efectivo sobrepasa la entrada de efectivo al negocio. Para pagar sus cuentas, Toyco necesitará pedir un préstamo de dinero a principio de año. Hay dos manera para pedir el préstamo:

a Tomar un préstamo de largo plazo a un año; los intereses de 1% se cargan cada mes, y el préstamo se debe pagar a fines de diciembre.

b Cada mes se pide el préstamo a corto plazo a una línea de crédito bancaria; se carga una tasa de interés de 1.5% y todos los préstamos a corto plazo se deben liquidar a finales de diciembre.

Al finalizar cada mes, el efectivo excedente gana 0.4% de interés. Formule una PL cuya solución ayude a Toyco a maximizar su estado de caja al empezar enero de 2004.

6 Considere el problema 5 con las siguientes modificaciones: Toyco puede dejar de pagar cada mes una parte o todo el efectivo que se debe en el presente mes. A esto se le llama "aplazamiento de los pagos". Los pagos se pueden atrasar sólo por un mes, y se carga un 1% de penalización sobre la cantidad aplazada. Por lo tanto, si se aplazan los pagos sobre un efectivo de 10 000 dólares que se debían en enero, entonces se deben pagar 10 000(1.01) = 10 100 en febrero. Con esta modificación, plantee una PL que ayude a Toyco a maximizar su efectivo disponible al primero de enero de 2004.

7 Suponga que pidió un préstamo de 1 000 dólares al 12% de interés anual a pagar en 60 mensualidades. Suponga además que se hacen pagos iguales al finalizar el mes 1, el mes 2, . . . el mes 60. Sabemos que al introducir en Excel la función

= PAGO (.01, 60, 1,000)

daría el pago por mes (22.24 dólares).

Es ilustrativo usar la PL para determinar los pagos mensuales. Sea p el pago mensual (incógnita). Cada mes se deben 0.01 • (saldo insoluto) de interés. El resto del pago mensual se utiliza para reducir el saldo insoluto. Por ejemplo, suponga que se pagan 30 dólares cada mes. Al principio del mes, el saldo insoluto es 1 000 dólares. Del pago del mes 1, 10 dólares se van a los intereses y 20 dólares a liquidar el saldo insoluto. Entonces se empezaría el mes 2 con un saldo insoluto de 980 dólares. La estrategia es usar PL para determinar el pago mensual que liquidará el préstamo al final del mes 60.

8 Usted es un analista financiero. Madonna acudió a usted porque necesita que la ayuden a liquidar sus cuentas de tarjeta de crédito. Ella debe a sus tarjetas de crédito las cantidades que se indican en la tabla 43. Madonna desea asignar hasta 5 000 por mes para liquidar estas tarjetas de crédito. Todas las tarjetas se deben liquidar en 36 meses. El objetivo de Madonna es minimizar el total de todos sus pagos. Para resolver este problema, usted debe entender cómo influyen los intereses sobre un préstamo. Para ilustrarlo, suponga que Madonna paga 5 000 dólares en Saks durante el mes 1. Entonces, su saldo en Saks al principio del mes 2 es

$$20\,000 - (5\,000 - .005(20\,000))$$

Esto es así porque Madonna incurrió en cargos por intereses de 0.005(20 000) durante el mes 1 sobre su tarjeta de Saks. ¡Ayúdele a Madonna a resolver su problema!

9 Winstonco planea invertir en tres proyectos. Si se invierte todo en un proyecto, los flujos de efectivo realizados (en millones de dólares) serán los que se presentan en la tabla 44. Por ejemplo, el proyecto 1 requiere salida de efectivo de 3 millones hoy y rendimientos de 5.5 millones de dólares en 3 años a partir de hoy. Ahora hay 2 millones de dólares en efectivo. En cada punto de tiempo (0, 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.5 años a partir de hoy) se podría, si así se quisiera, pedir un préstamo hasta de 2 millones de dólares a 3.5% de interés (por 6 meses). El efectivo sobrante gana 3% (por 6 meses) de interés. Por ejemplo, si después de pedir el préstamo y de invertir en el tiempo 0 hay 1 millón de dólares se podrían recibir 30 000 de intereses en el tiempo 0.5 del año. El objetivo de Winstonco es maximizar el efectivo disponible después del estado de cuenta de flujos de efectivo en el tiempo 3. ¿Qué estrategia de inversión y de préstamos se debe usar? Recuerde que se puede invertir en una fracción de un proyecto. Por ejemplo, si se invierte en 0.5 del proyecto 3, entonces hay salidas de efectivo de −1 millón de dólares en el tiempo 0 y 0.5.

TABLA 43

Tarjeta	Saldo (dólares)	Tasa mensual (%)
La de Saks de la 5a Av.	20 000	.5
La de Blommingdale	50 000	1
La de Macys	40 000	1.5

TABLA 44

	Flujo de efectivo		
Tiempo (años)	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3
0	−3	−2	−2
.5	−1	−0.5	−2
1	+1.8	1.5	−1.8
1.5	1.4	1.5	1
2	1.8	1.5	1
2.5	1.8	0.2	1
3	5.5	−1	6

3.12 Programación del trabajo en varios periodos

En la sección 3.5 se explicó que la PL se podría aplicar para elaborar los horarios de empleados en un entorno estático donde la demanda no cambia con el tiempo. El ejemplo siguiente (una versión modificada de un problema tomado de Wagner [1975]) ilustra cómo la PL se usa para calendarizar la capacitación de los empleados cuando una compañía se enfrenta a una demanda que cambia con el tiempo.

EJEMPLO 16 Horarios de trabajo en varios periodos

CSL es una cadena de tiendas de servicio para computadoras. La cantidad de horas de tiempo de reparación calificada que CSL requiere durante los cinco meses siguientes es como sigue:

Mes 1 (enero): 6 000 h
Mes 2 (febrero): 7 000 h
Mes 3 (marzo): 8 000 h
Mes 4 (abril): 9 500 h
Mes 5 (mayo): 11 000 h

A principios de enero, 50 técnicos calificados trabajan para CSL. Cada técnico calificado puede trabajar hasta 160 h por mes. Para cumplir con las demandas en el futuro, es necesario capacitar a nuevos técnicos. Toma un mes capacitar un nuevo técnico. Durante el mes de capacitación, un técnico experimentado debe supervisar al aprendiz durante 50 horas. Cada técnico experimentado gana 2 000 dólares al mes (incluso si no trabaja las 160 horas completas). Además, durante el mes de entrenamiento, el aprendiz recibe 1 000 dólares. Al final de cada mes, 5% de los técnicos experimentados de CSL abandonan el trabajo para unirse a Plum Computers. Formule un PL con cuya solución CSL pueda minimizar el costo de mano de obra en el que incurre para cumplir con el servicio de reparación en los cinco meses siguientes.

Solución CSL debe determinar la cantidad de técnicos que deben ser capacitados durante el mes t ($t = 1, 2, 3, 4, 5$). Por lo tanto, se define

$$x_t = \text{cantidad de técnicos capacitados durante un mes } t \qquad (t = 1, 2, 3, 4, 5)$$

CSL desea minimizar el costo total de la mano de obra durante los cinco meses siguientes. Obsérvese que

Costo total de mano de obra = costo por pagar a los aprendices + costo por pagar a los técnicos experimentados

Para expresar el costo por pagar a los técnicos experimentados es necesario definir para $t = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$y_t = \text{cantidad de técnicos experimentados al inicio del mes } t$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{Costo total de mano de obra} = {} & (1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5) \\ & + (2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función objetivo de CSL es

$$\begin{aligned}\min z = {} & 1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5 \\ & + 2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5\end{aligned}$$

¿Cuáles son las restricciones de CSL? Nótese que $y_1 = 50$, y que para $t = 1, 2, 3, 4, 5$, CSL debe tener la certeza de que

Número de horas-técnicos disponibles durante el mes t

$$\geq \text{número de horas-técnico requeridas durante el mes } t \qquad (72)$$

Como cada aprendiz requiere 50 h de tiempo por parte de técnicos experimentados, y cada técnico experimentado está disponible 160 h al mes,

$$\text{Número de horas-técnico disponibles durante el mes } t = 160y_t - 50x_t$$

Entonces (72) genera las cinco limitaciones siguientes:

$$\begin{aligned}160y_1 - 50x_1 &\geq 6\,000 && (\text{ restricción del mes 1}) \\ 160y_2 - 50x_2 &\geq 7\,000 && (\text{ restricción del mes 2}) \\ 160y_3 - 50x_3 &\geq 8\,000 && (\text{ restricción del mes 3}) \\ 160y_4 - 50x_4 &\geq 9\,500 && (\text{ restricción del mes 4}) \\ 160y_5 - 50x_5 &\geq 11\,000 && (\text{ restricción del mes 5})\end{aligned}$$

Al igual que en los otros planteamientos de varios periodos, se necesitan restricciones que relacionen las variables de los diferentes periodos. En el problema de CSL, es importante darse cuenta de que la cantidad de técnicos disponibles al principio de cualquier mes está determinada por el número de técnicos experimentados disponibles durante el mes anterior y la cantidad de técnicos entrenados durante el mes anterior:

$$\begin{array}{c} \text{Técnicos experimentados} \\ \text{disponibles al principio del mes } t \end{array} = \begin{array}{l} \text{Técnicos experimentados} \\ \text{disponibles al principio del mes } (t-1) \\ + \text{ técnicos entrenados durante el mes } (t-1) \\ - \text{ técnicos experimentados que abandonan el} \\ \quad \text{trabajo durante el mes } (t-1) \end{array} \tag{73}$$

Por ejemplo, para febrero, (73) es igual a

$$y_2 = y_1 + x_1 - 0.05y_1 \qquad \text{o bien} \qquad y_2 = 0.95y_1 + x_1$$

De igual manera, para marzo con (73) se tiene

$$y_3 = 0.95y_2 + x_2$$

y para abril

$$y_4 = 0.95y_3 + x_3$$

y para mayo

$$y_5 = 0.95y_4 + x_4$$

Al añadir las restricciones de signo $x_t \geq 0$ y $y_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4, 5$), se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z = {} & 1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5 \\ & + 2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \text{s.a} & 160y_1 - 50x_1 \geq 6\,000 & y_1 = 50 \\ & 160y_2 - 50x_2 \geq 7\,000 & 0.95y_1 + x_1 = y_2 \\ & 160y_3 - 50x_3 \geq 8\,000 & 0.95y_2 + x_2 = y_3 \\ & 160y_4 - 50x_4 \geq 9\,500 & 0.95y_3 + x_3 = y_4 \\ & 160y_5 - 50x_5 \geq 11\,000 & 0.95y_4 + x_4 = y_5 \\ & \quad x_t, y_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4, 5) & \end{array}$$

La solución óptima es $z = 593{,}777$; $x_1 = 0$; $x_2 = 8.45$; $x_3 = 11.45$; $x_4 = 9.52$; $x_5 = 0$; $y_1 = 50$; $y_2 = 47.5$; $y_3 = 53.58$; $y_4 = 62.34$; y $y_5 = 68.75$.

En realidad, las y_t deben ser enteros, por lo que es difícil de interpretar la solución. El problema con este planteamiento es que suponer que exactamente 5% de los empleados dejan el trabajo cada mes ocasiona que la cantidad de empleados cambie desde un número entero durante un mes a una cantidad fraccionaria el mes siguiente. Quisiéramos suponer que la cantidad de empleados que dejan el trabajo cada mes es el entero más cercano a 5% de la fuerza de trabajo total, pero entonces ¡no se tiene un problema de programación lineal!

PROBLEMAS

Grupo A

1 Si $y_1 = 38$, entonces ¿cuál sería la solución óptima para el problema de CSL?

2 Una compañía de seguros opina que se necesitarán las cantidades siguientes de computadoras personales durante los próximos seis meses: enero, 9; febrero, 5; marzo, 7; abril, 9; mayo, 10; junio, 5. Es posible rentar las computadoras por periodos de uno, dos o tres meses a las siguientes tarifas unitarias: tarifa por un mes, 200 dólares; tarifa por dos meses, 350 dólares; tarifa por tres meses, 450 dólares. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo por la renta del equipo necesario. Podría suponerse que si se renta una máquina por un periodo que se prolonga después de junio, el costo de la renta se prorratea. Por ejemplo, si se renta una computadora por tres meses al principio de mayo, entonces la tarifa de la renta de $\frac{2}{3}(450) = 300$, no 450 dolares, debe establecerse en la función objetivo.

3 El Servicio Interno de Ingresos ha determinado que durante cada uno de los 12 meses siguientes se requerirá la cantidad de supercomputadoras que se señala en la tabla 45. Para cumplir con estas condiciones, esta institución renta supercomputadoras por un periodo de uno, dos y tres meses. Cuesta 100 dólares rentar una supercomputadora por un mes,

TABLA 45

Mes	Cantidad de computadoras
1	800
2	1 000
3	600
4	500
5	1 200
6	400
7	800
8	600
9	400
10	500
11	800
12	600

TABLA 46

Mes	Precio de venta ($)	Precio de compra ($)
1	3	8
2	6	8
3	7	2
4	1	3
5	4	4
6	5	3
7	5	3
8	1	2
9	3	5
10	2	5

180 dólares por dos meses y 250 dólares por tres meses. Al empezar el mes 1 esta institución no tiene supercomputadoras. Determine el plan de renta que cumpla con las condiciones de los 12 meses siguientes a un costo mínimo. *Nota*: Usted podría suponer que las rentas fraccionarias son adecuadas, así que si la solución señala que se deben rentar 140.6 computadoras por un mes, usted puede redondear este valor (a 141 o 140) sin tener mucho efecto en el costo total.

Grupo B

4 Usted es propietario de una bodega de trigo de 20 000 bushels de capacidad. Al empezar el mes 1, usted tiene 6 000 bushels de trigo. El trigo se puede vender y comprar cada mes al precio por cada 100 bushels que se da en la tabla 46.

La sucesión de eventos durante cada mes es como sigue:

a Usted mantiene la existencia inicial de trigo.

b Puede vender alguna cantidad de trigo hasta su existencia inicial al precio de venta del mes actual.

c Puede comprar (al precio de compra del mes actual) tanto trigo como usted quiera, sólo sujeto a la limitación de las dimensiones de la bodega.

Su objetivo es plantear un PL que se pueda utilizar para determinar cómo maximizar la utilidad ganada en los diez meses siguientes.

RESUMEN

Definiciones de programación lineal

Un **problema de programación lineal (PL)** consta de tres partes

1 Una función lineal (la **función objetivo**) de variables de decisión (por ejemplo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$) que se puede maximizar o minimizar.

2 Un conjunto de **restricciones** (cada una de las cuales debe ser una igualdad lineal o desigualdad lineal) que limita los valores que podrían asumir las variables de decisión.

3 Las **restricciones de signo,** las cuales especifican para cada variable de decisión x_j (1) que la variable x_j tiene que ser no negativa, $x_j \geq 0$ o bien, (2) que la variable x_j podría ser positiva, cero o negativa, x_j **no tiene restricciones de signo (nrs).**

El coeficiente de una variable en la función objetivo es el **coeficiente de la función objetivo** de la variable. El coeficiente de una variable en una restricción es un **coeficiente tecnológico.** El lado derecho de cada restricción se denomina **segundo miembro** de la restricción.

Un *punto* es simplemente una especificación de los valores de cada variable de decisión. La **región factible** de una PL consta de todos los puntos que satisfacen las restricciones del PL y las restricciones de signo. Cualquier punto en la región factible que tiene el valor z más grande de todos los puntos de la región factible (para un problema de maximización) es una **solución óptima** para el PL. Un PL podría no tener solución óptima, tener una solución óptima o una cantidad infinita de soluciones óptimas.

Una restricción en un PL es activa si el primer miembro y el segundo miembro son iguales cuando los valores de las variables en la solución óptima se sustituyen en la restricción.

Solución gráfica de problemas de programación lineal

La región factible para cualquier PL es un **conjunto convexo.** Si un PL tiene una solución óptima hay un punto extremo (o vértice) de la región factible que es una solución óptima para el PL.

Se puede resolver un PL por medio del método gráfico (problemas de maximización) con dos variables de decisión como se indica:

Paso 1 Se grafica la región factible.

Paso 2 Se traza una recta de isoutilidades.

Paso 3 Se desplaza uno en forma paralela a la recta de isoutilidades en la dirección en que se incrementa z. El último punto en la región factible que tiene contacto con la recta de isoutilidades es una solución óptima de la PL.

Soluciones de PL: cuatro casos

Cuando se resuelve un PL se presenta uno de los siguientes cuatro casos:

Caso 1 El PL tiene una solución única.

Caso 2 El PL tiene más de una solución óptima (en realidad, una cantidad infinita). Es el caso de las **soluciones óptimas alternas.** Este caso se identifica en forma gráfica cuando la recta de isoutilidades coincide con un segmento de recta completo antes de abandonar la región factible.

Caso 3 El PL es **no factible** (no tiene solución factible). Esto quiere decir que la región factible no contiene puntos.

Caso 4 El PL es no acotada. Esto significa (en un problema de maximización) que hay puntos con valores de z arbitrariamente grandes en la región factible. Este caso se identifica mediante el método gráfico por el hecho de que al desplazarse en forma paralela a una recta de isoganancias en la dirección en que se incrementa z nunca se pierde el contacto con la región factible de la PL.

Planteamiento de los PL

El paso más importante al plantear la mayoría de los PL es determinar las variables de decisión en forma correcta.

En cualquier restricción, los términos deben tener las mismas unidades. Por ejemplo, un término no puede tener las unidades "libras de materia prima" mientras que otro tiene las unidades "onzas de materia prima".

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Bloomington Breweries produce cerveza y *ale*. La cerveza se vende a 5 dólares el barril y la *ale* a 2 dólares el barril. La producción de un barril de cerveza requiere 5 lb de maíz y 2 lb de lúpulo. Para elaborar un barril de *ale* se necesitan 2 lb de maíz y 1 lb de lúpulo. Se dispone de 60 libras de maíz y 25 lb de lúpulo. Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar los ingresos. Resuelva el PL en forma gráfica.

2 El granjero Jones hornea dos tipos de pasteles (chocolate y vainilla) para complementar sus ingresos. Los pasteles de chocolate se pueden vender en 1 dólar cada uno, y los de vainilla a 50 centavos cada uno. Para elaborar un pastel de chocolate se requieren 20 min de horneado y 4 huevos. Cada pastel de vainilla requiere 40 min de horneado y sólo un huevo. Se dispone de 8 h de tiempo de horneado y de 30 huevos. Plantee un PL que maximice el ingreso del granjero Jones y, luego, resuelva el PL mediante el método gráfico. (Una cantidad fraccionaria de pastel es aceptable.)

3 Tengo 100 dólares. Se puede invertir en las opciones siguientes en los tres años próximos.

Inversión A Cada dólar invertido ahora rinde 0.10 de dólar dentro de un año a partir de hoy y 1.30 tres años después de este momento.
Inversión B Cada dólar invertido ahora rinde 0.20 de dólar dentro de un año a partir de hoy y 1.10 dos años a partir de ahora.
Inversión C Cada dólar invertido durante un año a partir de ahora rinde 1.50 dólares dentro de tres años a partir de ahora.

El efectivo que no se invierte se puede asignar a los fondos del mercado de valores durante cada año, en donde rinde 6% de intereses por año. Se pueden colocar cuando mucho 50 dólares en cada inversión A, B y C. Plantee un PL que maximice mi efectivo disponible dentro de tres años a partir de ahora.

4 Sunco procesa crudo para obtener combustible para aviones y aceite combustible. Cuesta 40 dólares la compra de cada 1 000 barriles de crudo, el cual es destilado y rinde 500 barriles de combustible para aviones y 500 barriles de aceite combustible. El producto de la destilación se podría vender directamente o procesar en el desintegrador catalítico. Si el combustible para aviones se vende después de la destilación sin ningún otro proceso, su precio es de 60 dólares por cada 1 000 barriles, y el del aceite combustible es de 40 dólares por cada mil barriles. Se requiere una hora para procesar 1 000 barriles de combustible para aviones en el desintegrador catalítico, y estos 1 000 barriles se pueden vender en 130 dólares. Procesar 1 000 barriles de aceite combustible requiere 45 min en el desintegrador; estos barriles se pueden vender en 90 dólares. Se pueden comprar a diario cuando mucho 20 000 barriles de crudo y se dispone de 8 h. de desintegrador catalítico. Plantee un PL para maximizar la utilidad de Sunco.

5 Finco tiene las inversiones siguientes como opciones:

Inversión A Por cada dólar invertido en el tiempo 0 se reciben 0.10 de dólar en el tiempo 1 y 1.30 dólares en el tiempo 2. (Tiempo 0 = hoy; tiempo 1 = un año a partir de hoy, y así sucesivamente.)
Inversión B Por cada dólar invertido en el tiempo 1 se reciben 1.60 dólares en el tiempo 2.
Inversión C Por cada dólar invertido en el tiempo 2 se reciben 1.20 dólares en el tiempo 3.

El efectivo excedente se podría invertir en cualquier momento en bonos del tesoro, los cuales rinden 10% por año. En el tiempo 0, hay 100 dólares. Se pueden invertir cuando mucho 50 dólares en cada una de las inversiones A, B y C. Plantee un PL que se pueda usar para maximizar el efectivo disponible de Finco en el tiempo 3.

6 Todo el acero que produce Steelco debe cumplir los requisitos siguientes: 3.2 a 3.5% de carbón; 1.8 a 2.5% de silicio; 0.9 a 1.2% de níquel; resistencia a la tensión de por lo menos 45 000 libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2). Steelco produce acero mediante la combinación de dos aleaciones. El costo y propiedades de cada aleación se proporcionan en la tabla 47. Suponga que la resistencia a la tensión de una combinación de dos aleaciones se puede determinar mediante el promedio de la resistencia de las aleaciones que se mezclan. Por ejemplo, una tonelada (t) de una mezcla que tiene 40% de la aleación 1 y 60 de la aleación 2 tienen una resistencia a la tensión de 0.4(42 000) + 0.6(50 000). Aplique la programación lineal para determinar cómo minimizar el costo de producir una tonelada de acero.

TABLA 47

	Aleación 1	Aleación 2
Costo por t (dól.)	190 dólares	200 dólares
Silicio	2	2.5
Níquel	1	1.5
Carbono	3	4
Resistencia a la tensión (lb/pulg^2)	42 000	50 000

7 Steelco produce dos tipos de acero en tres acereras distintas. Cada acerera tiene disponibles en un mes dado 200 horas de tiempo de alto horno. Debido a las diferencias en los hornos de cada acerera, el tiempo y el costo por producir una tonelada de acero son distintos en cada una de ellas. El tiempo y el costo en cada acerera se proporcionan en la tabla 48. Cada mes, Steelco debe producir por lo menos 500 toneladas del acero 1 y 600 toneladas del acero 2. Plantee un PL para minimizar el costo de producir el acero deseado.

8† El vivero Walnut tiene dos granjas en donde se cultiva trigo y maíz. Debido a las condiciones del suelo distintas, hay diferencias en el rendimiento y el costo al cultivar los cereales en las dos granjas. Los rendimientos y los costos se muestran en la tabla 49. Ambas granjas cuentan cada una con 100 acres disponibles para el cultivo; se deben sembrar 11 000 bushels de trigo y 7 000 bushels de maíz. Encuentre un plan de siembra que minimice el costo para poder cumplir con la demanda. ¿Cómo se podría usar una generalización de este modelo para asignar en forma eficiente la producción de cultivos en toda una nación?

9 Candy Kane Cosmetics (CKC) fabrica el perfume Leslie, el cual requiere productos químicos y mano de obra. Hay dos procesos de producción: en el proceso 1 se transforma una unidad de mano de obra y dos unidades de productos químicos en 3 oz de perfume. En el proceso 2 se transforman dos unidades de mano de obra y tres unidades de productos químicos en 5 oz de perfume. CKC gasta 3 dólares al comprar una unidad de mano de obra y 2 dólares por una unidad de productos químicos. Se pueden comprar cada año

TABLA 48
Producción de acero en tons.

	Acero 1		Acero 2	
Acerera	Costo (dól.)	Tiempo (min.)	Costo (dól)	Tiempo (min.)
1	\$10	20	\$11	22
2	\$12	24	\$ 9	18
3	\$14	28	\$10	30

TABLA 49

	Granja 1	Granja 2
Rendimiento de maíz/acre	500	650
Costo/acre de maíz (dól.)	100	120
Rendimiento de trigo/acre	400	350
Costo/acre de trigo (dól.)	90	80

†Basado en Heady y Egbert (1964).

hasta 20 000 unidades de mano de obra y 35 000 unidades de productos químicos. Como no hay publicidad, CKC opina que puede vender 1 000 oz de perfume. Para estimular la demanda de Leslie, CKC desea contratar a la bella modelo Jenny Nelson. Jenny cobra 100 dólares la hora. Se estima que por cada hora que Jenny trabaja para la compañía la demanda del perfume se incrementa en 200 oz. Cada onza del perfume Leslie se vende en 5 dólares. Utilice la PL para determinar cómo CKC puede maximizar su utilidad.

10 Carco tiene un presupuesto para publicidad de 150 000 dólares. La compañía planea anunciarse en diarios y en TV, con el fin de aumentar las ventas de automóviles. A medida que Carco utiliza más un medio en particular, es menos efectivo cada anuncio que se agrega. En la tabla 50 se señala la cantidad de nuevos clientes a los que alcanza cada anuncio. Cada anuncio en los periódicos cuesta 1 000 dólares y cada anuncio en TV cuesta 10 000. Se pueden contratar, cuando mucho, 30 anuncios en los diarios y 15 en TV. ¿Cómo puede maximizar Carco la cantidad de clientes nuevos creados por la publicidad?

11 Sunco Oil tiene refinerías en Los Ángeles y Chicago. La refinería de Los Ángeles puede procesar hasta 2 millones de barriles de crudo por año, y la refinería de Chicago refina hasta 3 millones. Una vez refinado, el crudo de embarca hacia dos puntos de distribución: Houston y la ciudad de Nueva York. Sunco estima que cada punto de distribución puede vender hasta 5 millones de barriles por año. Debido a las diferencias en los costos de embarque y refinación, la utilidad ganada (en dólares) por millón de barriles de aceite refinado embarcado depende de dónde se refinó el crudo y del punto de distribución (*véase* tabla 51). Sunco planea ampliar la capacidad de cada refinería. Cada millón de barriles de capacidad de refinación anual que se sume costará 120 000 dólares en el caso de la refinería de Los Angeles y 150 000 dólares en el caso de la refinería de Chicago. Utilice la PL para determinar cómo puede maximizar Sunco su utilidad menos los costos de expansión sobre un periodo de 10 años.

12 Un grupo de investigación de mercado necesita detectar por lo menos a 150 esposas, 120 esposos, 100 varones adultos solteros y 110 mujeres adultas solteras mediante una encuesta telefónica. Cuesta 2 dólares hacer una llamada en el día y (debido a los costos de mano de obra más altos) 5 dólares una llamada por la noche. Los resultados se dan en la tabla

TABLA 50

	Número de anuncios	Clientes nuevos
Diarios	1–10	900
	11–20	600
	21–30	300
TV	1–5	10 000
	6–10	5 000
	11–15	2 000

TABLA 51

	Utilidad por millón de barriles (dólares)	
De	A Houston	A Nueva York
Los Ángeles	20 000	15 000
Chicago	18 000	17 000

TABLA 52

Persona que contesta	% de llamadas en el día	% de llamadas en la noche
Esposa	30	30
Esposo	10	30
Varón soltero	10	15
Mujer soltera	10	20
Nadie	40	5

52. Debido a que el personal es limitado, cuando mucho la mitad de todas las llamadas pueden ser nocturnas. Plantee un PL para minimizar el costo de completar la encuesta.

13 Feedco produce dos tipos de alimento para ganado; ambos constan totalmente de trigo y alfalfa. El alimento 1 debe contener por lo menos 80% de trigo, y el alimento 2 debe contener por lo menos 60% de alfalfa. El alimento 1 se vende a 1.50 dólares/lb y el alimento 2, a 1.30/lb. Feedco puede comprar hasta 1 000 lb de trigo a 50 centavos la libra y hasta 800 lb de alfalfa a 40 centavos la libra. La demanda por cada tipo de alimento es ilimitada. Formule un PL que maximice la utilidad de Feedco.

14 Feedco (*véase* problema 13) decidió hacer un descuento a su cliente (suponga que tiene sólo un cliente. Si el cliente compra más de 300 lb del alimento 1, cada libra por arriba de las primeras 300 costará sólo 1.25 dólares. De igual manera, si el cliente compra más de 300 lb del alimento 2, cada libra por arriba de las primeras 300 lb costará un dólar. Modifique el PL del problema 13 para explicar la presencia de los descuentos. (*Sugerencia*: Defina variables para el alimento vendido a cada precio.)

15 Chemco elabora dos productos químicos: A y B. Estos productos se fabrican por medio de dos procesos de manufactura. El proceso 1 requiere 2 h de mano de obra y 1 lb de materia prima para producir 2 oz de A y 1 oz de B. Para el proceso 2 se necesitan 3 h de mano de obra y 2 lb de materia prima para fabricar 3 oz de A y 2 oz de B. Se dispone de 60 h de mano de obra y 40 lb de materia prima. La demanda de A es ilimitada, pero sólo se puede vender 20 oz de B. El producto A se vende a 16 dólares/oz y B se vende a 14 dólares/oz. Cualquier cantidad de B que no se venda se tiene que desechar a un costo de 2 dólares/oz. Encuentre un PL que maximice los ingresos de Chemco menos el costo de destruir el producto.

16 Suponga que, en el ejemplo de las computadoras CSL de la sección 3.12, se requieren dos meses para capacitar a un técnico, y que durante el segundo mes de capacitación cada aprendiz necesita 10 h de atención por parte de un técnico experimentado. Modifique el planteamiento en el texto para incluir estos cambios.

17 Furnco produce mesas y sillas. Todas las mesas y sillas deben estar hechas por completo de encino o de pino. Hay un total de 150 pies tablón de encino y 210 pies tablón de pino. Se requieren 17 pies tablón de encino o 30 pies tablón de pino para una mesa y 5 pies tablón de encino o 13 pies tablón de pino para una silla. Las mesas se venden a 40 dólares cada una, y las sillas a 15 dólares cada una. Formule un PL que maximice el ingreso

18[†] La ciudad de Busville tiene tres distritos escolares. La cantidad de estudiantes de minorías étnicas y de las mayo-

[†]Basado en Franklin y Koenigsberg (1973).

TABLA 53

Distrito	Estudiantes de alguna minoría	Estudiantes de las mayorías
1	50	200
2	50	250
3	100	150

TABLA 54

Distrito	Escuela Cooley	Escuela Walt Whitman
1	1	2
2	2	1
3	1	1

rias en cada distrito se proporciona en la tabla 53. De todos los estudiantes, 25% ($\frac{200}{800}$) son estudiantes que pertenecen a alguna minoría.

La corte local decidió que las dos escuelas de bachillerato de la ciudad (escuela Cooley y escuela Walt Whitman) deben tener aproximadamente el mismo porcentaje de estudiantes pertenecientes a las minorías (dentro $\pm 5\%$) que el que hay en toda la ciudad. Las distancias (en millas) entre los distritos escolares y las escuelas de bachillerato se proporcionan en la tabla 54. Cada escuela debe tener una inscripción de 300 a 500 estudiantes. Aplique la programación lineal para determinar la cantidad de estudiantes en las escuelas que minimice la distancia total que los estudiantes deben recorrer para llegar a la escuela.

19† Brady Corporation fabrica alacenas. Requiere cada semana 90 000 pies cúbicos de tablones. La compañía puede conseguir madera de dos maneras: primero, la podría comprar con un proveedor y secarla en el horno del proveedor. Segundo, podría cortar troncos en sus propios terrenos, cortarlos en tablones en su aserradero y, por último, secarlos en su propio horno. Brady puede comprar tablones grado 1 o grado 2. Los tablones grado 1 cuestan 3 dólares por pie cúbico, y cuando se secan rinden 0.7 pies cúbicos de madera útil. Los tablones grado 2 cuestan 7 dólares el pie cúbico, y luego de secarlos rinden 0.9 pies cúbicos de madera útil. A la compañía le cuesta 3 dólares cortar los troncos. Después de cortar y secar un tronco, éste rinde 0.8 pies cúbicos de tablones. Brady gasta 4 dólares por pie cúbico de tablones secados. Además, cuesta 2.50 dólares por pie cúbico de troncos enviados al aserradero. El aserradero puede procesar cada semana hasta 35 000 pies cúbicos de tablones. Se pueden comprar cada semana hasta 40 000 pies cúbicos de tablones grado 1 y hasta 60 000 pies cúbicos del grado 2. Se dispone cada semana de 40 h para secar los tablones. El tiempo que se requiere para secar 1 pie cúbico de madera grado 1, madera grado 2 o troncos es como se indica; grado 1, 2 segundos (s); grado 2, 0.8 s; troncos, 1 a 3 s. Determine un PL que ayude a Brady a minimizar el costo a la semana por cumplir con la demanda de tablones procesados.

20‡ La *Canadian Parks Commission* controla dos zonas. La zona 1 consiste en 300 acres y la zona 2, de 100 acres. Cada acre de la zona 1 se puede usar para abetos o caza, o ambos. Cada acre de la zona 2 se puede usar para abetos o para acampar, o para ambas cosas. El capital (en cientos de dólares), la mano de obra (días-trabajador) que se requieren para conservar un acre de cada zona y la utilidad (en miles de dólares) por acre para cada uso posible se proporciona en la tabla 55. Hay un capital disponible de 150 000 dólares y 200 días-hombre. ¿Qué usos se le pueden asignar a las zonas para maximizar la utilidad que se obtenga de las dos zonas?

21§ Chandler Entreprises elabora dos productos competitivos: A y B. La compañía quiere vender estos productos a dos grupos de clientes, el grupo 1 y el grupo 2. El valor que cada cliente asigna a una unidad de A y de B es el que se muestra en la tabla 56. Cada cliente comprará el producto A o el B, pero no ambos. Un cliente está dispuesto a comprar el producto A si cree que

Valor del producto A − precio del producto A ≥ valor del producto B − precio del producto B

Valor del producto A −precio del producto A
≥ Valor del producto B − Precio del producto B

y

Valor del producto A − Precio del producto A ≥ 0

Un cliente está dispuesto a comprar el producto B si cree que

Valor del producto B − precio del producto B
≥ valor del producto A − precio del producto A

y

Valor del producto B − precio del producto B ≥ 0

El grupo tiene 1 000 miembros y el grupo 2 consta de 1 500. Chandler desea establecer los precios para cada producto, de tal manera que haya certeza de que los miembros del grupo 1 compren el producto A y los miembros del grupo 2 compren el producto B. Determine un PL que ayude a Chandler a maximizar sus ingresos.

22¶ Alden Enterprises elabora dos productos. Cada uno de los productos se puede fabricar en una de las dos máquinas que hay. El tiempo necesario para elaborar cada producto (en horas) en cada una de las máquinas se presenta en la ta-

TABLA 55

Zona	Capital	Mano de obra	Utilidad
1 Abetos	3	0.1	0.2
1 Caza	3	0.2	0.4
1 Ambos	4	0.2	0.5
2 Abetos	1	0.05	0.06
2 Acampar	30	5	0.09
2 Ambos	10	1.01	1.1

TABLA 56

	Cliente del grupo 1	Cliente del grupo 2
Valor dado a A	\$10	\$12
Valor dado a B	\$8	\$15

†Basado en Carino y Lenoir (1988).
‡Basado en Cheung y Auger (1976).

§Basado en Dobson y Kalish (1988).
¶Basado en Jain, Stott, y Vasold (1978).

TABLA 57

Producto	Máquina 1	Máquina 2
1	4	3
2	7	4

TABLA 58

	Demanda		Precios	
Producto	Mes 1	Mes 2	Mes 1	Mes 2
1	100	190	\$55	\$12
2	140	130	\$65	\$32

bla 57. Se dispone cada mes de 500 h en cada una de las máquinas. Los clientes están dispuestos cada mes a comprar hasta las cantidades de cada producto que se señalan en la tabla 58 y a los precios indicados ahí. El objetivo de la compañía es maximizar el ingreso obtenido por la venta de unidades durante los dos meses siguientes. Plantee un PL que ayude a alcanzar ese objetivo

23 Kiriakis Elctronics elabora tres productos. Cada producto debe pasar por un proceso en tres máquinas distintas. Cuando una máquina está en uso, la debe operar un trabajador. El tiempo (en horas) necesario para procesar cada producto en cada máquina y la utilidad asociada con cada producto se muestra en la tabla 59. Se dispone en la actualidad de cinco máquinas tipo 1, tres máquinas tipo 2 y cuatro máquinas tipo 3. La compañía tiene 10 trabajadores y debe determinar cuántos empleados asignar a cada máquina. La planta está abierta 40 h por semana, y cada trabajador labora 35 horas por semana. Establezca un PL que le permita a Kiriakis asignar trabajadores a las máquinas, de tal manera que se maximice la utilidad semanal. (*Nota*: Un trabajador no pasa toda la semana laboral operando una sola máquina.)

24 El hospital de Gotham City atiende pacientes de cuatro grupos relacionados por el diagnóstico (GRD). La contribución a la utilidad, el uso del servicio de diagnóstico (en horas), días-cama (en días), atención de enfermeras (en horas) y uso de medicamentos (en dólares) se proporcionan en la tabla 60. El hospital dispone ahora cada semana de 570 h de servicios de diagnóstico, 1 000 días-cama, 50 000 horas de atención de enfermeras y 50 000 dólares en medicamentos. Para cumplir las demandas mínimas de atención a la salud de la comunidad, se deben atender todas las semanas por lo menos 10 pacientes del GRD1, 15 del GRD2, 40 del GRD3 y 160 del GRD4. Utilice un PL para determinar la mezcla óptima de los GRD.[†]

TABLA 59

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Máquina 1	2	3	4
Máquina 2	3	5	6
Máquina 3	4	7	9
Utilidad (dólares)	6	8	10

TABLA 60

GRD	Utilidad	Servicio de diagnóstico	Días-Cama	Uso de enfermería	Fármacos
1	2 000	7	5	30	800
2	1 500	4	2	10	500
3	500	2	1	5	150
4	300	1	0	1	50

25 Oliver Winery elabora cuatro vinos ganadores de premios en Bloomington, Indiana. Las contribuciones a la utilidad, horas de mano de obra y uso del tanque (en horas) por galón por cada tipo de vino se indican en la tabla 61. De acuerdo con la ley, se pueden producir cuando mucho cada año 100 000 galones de vino. Se dispone cada año de un máximo de 12 000 horas de mano de obra y 32 000 horas de tanque. Cada galón del vino 1 gasta un promedio de $\frac{1}{3}$ del año en inventario; el vino 2, un promedio de 1 año; el vino 3, un promedio de 2 años; el vino 4, un promedio de 3.333 años. La bodega puede manejar un inventario promedio de 50 000 galones. Determine cuánto se debe producir al año de cada tipo de vino para maximizar la utilidad de Oliver Winery.

26 Resuelva mediante el método gráfico el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 5x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\
x_1 + x_2 &\geq 4 \\
2x_1 + 10x_2 &\geq 20 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

27 Grummins Engine fabrica camiones a diesel. Las nuevas normas gubernamentales sobre las emisiones señalan que las emisiones contaminantes promedio de todos los camiones fabricados en los tres años próximos no pueden ser mayores de 10 gramos por camión. Grummins produce dos tipos de camiones. Cada camión tipo 1 se vende en 20 000 dólares, cuesta 15 000 dólares fabricarlo y emite 15 gramos de contaminantes. Cada camión tipo 2 se vende en 17 000 dólares, cuesta 14 000 dólares fabricarlo y emite 5 gramos de contaminantes. La capacidad de producción limita la producción total de camiones durante cada año, a cuando mucho 320 camiones. Grummins sabe que la cantidad máxima que se puede vender de cada tipo de camión durante cada uno de los tres años próximos, se da en la tabla 62.

Por consiguiente, se pueden vender durante el año 3 cuando mucho 300 camiones tipo 1. La demanda se podría cumplir con la producción anterior o con la producción del año actual. Cuesta 2 000 dólares conservar un camión (de cualquier tipo) en inventario durante un año. Formule un PL que ayude a Grummins a maximizar su utilidad durante los próximos tres años.

TABLA 61

Vino	Utilidad (dólares)	Mano de obra (h)	Tanque (h)
1	6	0.2	0.5
2	12	0.3	0.5
3	20	0.3	1
4	30	0.5	1.5

[†]Basado en Robbins y Tuntiwonpiboon (1989).

TABLA 62
Demanda máxima de camiones

Año	Tipo 1	Tipo 2
1	100	200
2	200	100
3	300	150

TABLA 63

Turno	Salario por hora	Defectos (por capacitor)	Precio
8 a.m. a 4 p.m.	\$12	4	\$18
4 p.m. a medianoche	\$16	3	\$22
Media noche a 8 a.m.	\$20	2	\$24

28 Describa todas las soluciones óptimas del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 4x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

29 Juiceco elabora dos productos: jugo de naranja premium y jugo de naranja regular. Ambos productos se fabrican con la combinación de dos tipos de naranjas: grado 6 y grado 3. Las naranjas en el jugo premium deben tener un grado promedio de por lo menos 5, y las del jugo regular, por lo menos de 4. Durante cada uno de los dos meses siguientes Juiceco puede vender hasta 1 000 galones de jugo premium y hasta 2 000 galones de jugo regular. El galón de jugo premium se vende a 1 dólar, en tanto que el de jugo regular se vende a 80 centavos. Al empezar el mes 1, Juiceco tiene 3 000 galones de naranja grado 6 y 2 000 galones de naranja grado 3. Al iniciar el mes 2, Juiceco podría comprar más naranjas grado 3 a 40 centavos/galón y más naranjas grado 6 a 60 centavos/galón. El jugo se echa a perder al final del mes, así que no tendría sentido elaborar jugo extra durante el mes 1 con la esperanza de usarlo para cumplir con la demanda del mes 2. Las naranjas que quedan al final del mes 1 se podrían usar para elaborar jugo para el mes 2. Al final del mes 1 se fija un costo de 5 centavos por cada galón sobrante de naranjas grado 3, y 10 centavos contra cada galón sobrante de naranjas grado 6. Además del costo de las naranjas, cuesta 10 centavos producir cada galón de jugo (regular o premium). Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar la utilidad (ingresos − costos) que obtiene Juiceco durante los dos meses próximos.

30 Resuelva mediante el método gráfico el problema siguiente de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

31 Determine mediante el método gráfico todas las soluciones de la programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

32 Todos los días, Eastinghouse fabrica capacitores durante tres turnos: 8 a.m. a 4 p.m., 4 p.m. a media noche, media noche a 8 a.m. El salario por hora que se paga a los empleados en cada turno, el precio cargado de cada capacitor elaborado durante cada turno y la cantidad de defectos en cada capacitor que se produce durante un turno dado se proporcionan en la tabla 63. Cada uno de los 25 trabajadores de la compañía puede ser asignado a uno de los tres turnos. Un empleado produce 10 capacitores durante su turno, pero debido a limitaciones de maquinaria, no más de 10 trabajadores pueden ser asignados a un turno dado. Se pueden vender diario, cuando mucho, 250 capacitores, y la cantidad promedio de defectos por capacitor no puede ser mayor de tres en la producción del día. Plantee un PL que maximice la utilidad diaria de Eastinghouse (ingresos por ventas − costo de la mano de obra).

33 Encuentre gráficamente todas las soluciones del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 8x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

34 Airco debe cumplir (a tiempo) con la siguiente demanda de acondicionadores de aire: mes 1, 300; mes 2, 400; mes 3, 500. Los acondicionadores de aire se pueden fabricar en Los Ángeles o en Nueva York. Se requieren 1.5 h de mano de obra calificada para fabricar un acondicionador de aire en Los Ángeles y 2 h en Nueva York. Producir un acondicionador de aire cuesta 400 dólares en Los Ángeles, y 350 dólares en Nueva York. Cada ciudad dispone todos los meses de 420 h de mano de obra calificada. Cuesta 100 dólares conservar un acondicionador de aire en inventario durante un mes. Al inicio del mes 1, Airco tiene 200 acondicionadores de aire en existencia. Plantee un PL cuya solución indique a Airco cómo minimizar el costo de cumplir la demanda de acondicionadores de aire en los tres meses próximos.

35 Plantee el problema siguiente como un problema de programación lineal: un operador de un invernadero planea proponerse para el trabajo de abastecer flores para los parques de la ciudad. Utiliza tulipanes, narcisos atrompetados y arbustos con flores en tres tipos de configuraciones. Se requieren 30 tulipanes, 20 narcisos atrompetados y 4 arbustos con flores para la configuración tipo 1. En la 2 se usan 10 tulipanes, 40 narcisos atrompetados y 3 arbustos con flores. Para la última se necesitan 20 tulipanes, 50 narcisos atrompetados y 2 arbustos con flores. La utilidad neta es 50 dólares por cada configuración tipo 1, 30 dólares por cada configuración tipo 2 y 60 dólares por cada configuración tipo 3. Tiene 1 000 tulipanes, 800 narcisos atrompetados y 100 arbustos en floración. ¿Cuántas configuraciones de cada tipo se deberán usar para obtener la máxima utilidad?

36 Explique cómo cambia el planteamiento del problema 35 si se suman las dos condiciones siguientes:

a La cantidad de configuraciones tipo 1 no puede ser mayor que el número de configuraciones tipo 2.

b Debe haber por lo menos cinco configuraciones de cada tipo.

37 Resuelva mediante el método gráfico el problema siguiente de PL:

$$\begin{aligned} \min z &= 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

38 Nosotros elaboramos dos productos: el producto 1 y el 2 en dos máquinas (máquina 1 y máquina 2). La cantidad de horas de tiempo de máquina y de mano de obra depende de la máquina y del producto según se ilustra en la tabla 64.

El costo de producción de una unidad de cada producto se proporciona en la tabla 65.

La cantidad de horas de mano de obra y el tiempo de máquina disponibles este mes está en la tabla 66.

Este mes se deben producir por lo menos 200 unidades del producto 1 y al menos 240 unidades del producto 2. Asimismo, por lo menos la mitad del producto 1 se debe elaborar en la máquina 1, y por lo menos la mitad del producto 2 se debe fabricar en la máquina 2. Determine entonces cómo podemos minimizar el costo de cumplir la demanda mensual.

39 Carrotco elabora dos productos: 1 y 2. Cada unidad de cada producto se debe procesar en la máquina 1 y en la máquina 2, y requiere materia prima 1 y materia prima 2. El uso de recursos se indica en la tabla 67.

TABLA 64

	Producto 1 Máquina 1	Producto 2 Máquina 1	Producto 1 Máquina 2	Producto 2 Máquina 2
Tiempo máquina	0.7	0.75	0.8	0.9
Mano de obra	0.75	0.75	1.2	1

TABLA 65

Producto 1 Máquina 1	Producto 2 Máquina 1	Producto 1 Máquina 2	Producto 2 Máquina 2
\$1.50	\$0.40	\$2.20	\$4.00

TABLA 66

Recurso	Horas disponibles
Máquina 1	200
Máquina 2	200
Mano de obra	400

TABLA 67

	Producto 1	Producto 2
Máquina 1	0.6	0.4
Máquina 2	0.4	0.3
Materia prima 1	2	1
Materia prima 2	1	2

TABLA 68

	Producto 1	Producto 2
Demanda	400	300
Precio de venta	30	35

Por consiguiente, se requieren 0.6 de unidad del tiempo de la máquina 1, 0.4 de unidad del tiempo de la máquina 2, 2 unidades de materia prima 1 y 1 unidad de materia prima 2 para producir una unidad del producto 1. El precio de venta por unidad y la demanda de cada producto se da en la tabla 68.

Cada unidad de materia prima 1 se compra en 4 dólares y cuesta 5 dólares producir cada unidad de materia prima 2. Es posible comprar cantidades ilimitadas de materia prima. Se dispone de 200 unidades de tiempo de la máquina 1 y 300 unidades de tiempo de la máquina 2. Determine cómo Carrotco puede maximizar su utilidad.

40 Una compañía ensambla dos productos: A y B. El producto A se vende en 11 dólares por unidad, y el producto B, a 23 dólares la unidad. Una unidad del producto A requiere 2 h en la línea de ensamble 1 y una unidad de materia prima. Para elaborar una unidad del producto B es necesario 2 unidades de materia prima, 1 unidad de A y 2 h en la línea 2. Se dispone de 1 300 h en la línea 1 y de 500 h en la línea 2. Una unidad de materia prima se podría comprar (a 5 dólares la unidad) o producir (a ningún costo) en 2 h de tiempo en la línea 1. Determine cómo maximizar la utilidad.

41 Ann y Ben están en proceso de divorcio y quieren saber cómo dividir sus propiedades comunes: la cuenta de retiro, la casa, la casita de verano, las inversiones y bienes diversos. Para empezar, se les pidió a Ann y Ben que asignaran un total de 100 puntos a los bienes, lo cual se muestra en la tabla 69.

Si se supone que todos los bienes son divisibles (es decir, una fracción de cada bien se podría entregar a cada persona), ¿cómo se podrían asignar los bienes? Dos criterios pueden regir la asignación de bienes:

Criterio 1 Cada persona debe terminar con el mismo número de puntos. Esto evita que Ann envidie a Ben y que Ben envidie a Ann.

Criterio 2 La cantidad total de puntos que recibe Ann y Ben debe ser maximizada.

Si los bienes no pudieran dividirse entre las personas, ¿qué problema surgiría?

42 Eli Daisy fabrica dos fármacos en Los Ángeles y en Indianápolis. El costo por producir una libra de cada fármaco se presenta en la tabla 70.

TABLA 69

	Puntos	
Producto	De Ann	De Ben
Cuenta de retiro	50	40
Casa	20	30
Casa de campo	15	10
Inversiones	10	10
Diversos	5	10

TABLA 70

Ciudad	Costo de fármaco (dólares)	Costo de fármaco (dólares)
Indianápolis	4.10	4.50
Los Ángeles	4.00	5.20

TABLA 71

Ciudad	Tiempo para el fármaco 1 (hr)	Tiempo para el fármaco 2 (Hr)
Indianápolis	.2	.3
Los Ángeles	.24	.33

El tiempo máquina (en horas) que se necesita para fabricar una libra de cada fármaco en cada ciudad se proporciona en la tabla 71.

Daisy necesita producir a la semana por lo menos 1 000 lb del fármaco 1 y 2 000 lb del fármaco 2. La compañía tiene 500 horas por semana de tiempo máquina en Indianápolis y 400 h/semana de tiempo máquina en Los Ángeles. Determine cómo Daisy podría minimizar el costo de producción de los fármacos necesarios.

43 Daisy también elabora Wozac en Nueva York y Chicago. Produce cada mes hasta 30 unidades en Nueva York y hasta 35 unidades en Chicago. El costo de producción de una unidad cada mes en cada lugar se proporciona en la tabla 72.

La demanda de los clientes que se muestra en la tabla 73 se debe cumplir a tiempo.

El costo por mantener una unidad en inventario (medido contra el inventario final) se da en la tabla 74.

TABLA 72

	Costo (dólares)	
Mes	Nueva York	Chicago
1	8.62	8.40
2	8.70	8.75
3	8.90	9.00

TABLA 73

Mes	Demanda (unidades)
1	50
2	60
3	40

TABLA 74

Mes	Costo por mantener en inventario (dólares)
1	0.26
2	0.12
3	0.12

Hay 10 unidades de Wozac en inventario al empezar el mes 1. Determine un programa que minimice los costos para los tres meses siguientes.

44 Usted está al mando de la refinería Dawson Creek. La refinería produce gasolina y aceite combustible a partir del petróleo crudo. La gasolina se vende a 11 dólares el barril y debe tener un grado promedio de por lo menos 9. El aceite combustible se vende a 6 dólares el barril, y debe tener por lo menos un grado promedio de 7. Se venden cuando mucho 2 000 barriles de gasolina y 600 barriles de aceite combustible.

El crudo que llega se procesa por medio de uno de tres métodos distintos. El rendimiento por barril y el costo por barril de cada método de proceso se muestran en la tabla 75.

Por ejemplo, si se refina un barril del crudo que llega por el método 1, el costo es de 3.40 dólares y el rendimiento es de 0.2 barriles de grado 6, 0.3 barriles de grado 8 y 0.5 barriles de grado 10. El costo abarca el costo por la compra del petróleo crudo.

Los grados 6 y 8 deben pasar por el desintegrador catalítico para mejorar su calidad antes de que se obtenga gasolina y aceite combustible. Un barril de grado 6 se "fracciona" a un barril de grado 8 a un costo de 1 dólar por barril. Un barril de grado 8 se "fracciona" a un barril de grado 10 a un costo de 1.50 dólares por barril. Determine cómo maximizar la utilidad de la refinería.

45 Poseemos 100 acciones de cada uno de los capitales en acciones (*stock*) 1 a 10. El precio original que se pagó por las acciones, el precio actual y el precio esperado en un año por cada capital en acciones se proporciona en la tabla 76.

Necesitamos dinero este día, por lo que vamos a vender algunas de las acciones. La tasa tributaria sobre las ganancias del capital es 30%. Si vendemos 50 acciones del *stock* 1, tenemos que pagar un impuesto de $0.3 \cdot 50(30 - 20) = 150$ dólares. También tenemos que pagar los costos por transacciones de 1% por cada transacción. Por lo tanto, nuestra venta de 50 acciones del *stock* 1 incurriría en un costo por transacciones de $0.01 \cdot 50 \cdot 30 = 15$ dólares. Después de los impuestos y los costos por transacción nos quedan 30 000 dólares por la venta de las acciones. Nuestro objetivo es maximizar el valor esperado (antes de impuestos) en un año de nuestro *stock* restante. ¿Cuáles *stocks* se deben vender? Suponga que se puede vender una fracción de acción del *stock*.

Grupo B

46 El Banco Nacional de Gotham City abre de lunes a viernes de 9 a.m. a 5 p.m. El banco sabe, por pasadas experiencias, que necesita la cantidad de cajeros que se señala en la tabla 77. El banco contrata a dos tipos de cajeros. Los cajeros de tiempo completo trabajan de 9 a 5, cinco días a la semana, excepto por una hora libre para tomar alimentos. (El banco determina cuándo un empleado de tiempo completo debe tomar su hora para los alimentos, pero cada ca-

TABLA 75

	Grado			
Método	6	8	10	Costo (dólares por barril)
1	0.2	0.3	0.5	3.40
2	0.3	0.4	0.3	3.00
3	0.4	0.4	0.2	2.60

TABLA 76

Stock	Acciones	Precio (dólares)		
		Compra	Actual	En un año
1	100	20	30	36
2	100	25	34	39
3	100	30	43	42
4	100	35	47	45
5	100	40	49	51
6	100	45	53	55
7	100	50	60	63
8	100	55	62	64
9	100	60	64	66
10	100	65	66	70
Tasa tributaria (%)	0.3			
Costo por transacción (%)	0.01			

TABLA 77

Periodo	Cajeros necesarios
9–10	4
10–11	3
1–Mediodía	4
Mediodía–1	6
1–2	5
2–3	6
3–4	8
4–5	8

jero debe salir entre mediodía y 1 p.m., o bien, entre 1 p.m. y 2 p.m.) Los empleados de tiempo completo ganan (incluso prestaciones salariales) 8 dólares por hora (esto incluye el pago por la hora de tomar alimentos). El banco podría contratar también cajeros de medio tiempo. Cada cajero de medio tiempo debe trabajar exactamente 3 h consecutivas todos los días. Un cajero de medio tiempo gana 5 dólares por hora (y no recibe prestaciones salariales). Para mantener la calidad adecuada de servicio, el banco decidió que se pueden contratar cuando mucho 5 cajeros de medio tiempo. Plantee un PL que cumpla con los requisitos de los cajeros al mínimo costo. Resuelva el PL mediante una computadora. Experimente con la respuesta del PL para determinar una estrategia de empleo con la que se minimicen los costos de mano de obra.

47[†] El Departamento de Policía de Gotham City emplea 30 oficiales de policía. Todos los oficiales trabajan 5 días a la semana. Los delitos fluctúan según el día de la semana, por lo que la cantidad de policías necesarios cada día depende del día de la semana: sábado, 28; domingo, 18; lunes, 18; martes, 24; miércoles, 25; jueves, 16; viernes, 21. El Departamento de Policía desea programar a los oficiales de policía para minimizar la cantidad de elementos cuyos días de descanso no son consecutivos. Formule una PL que logre este objetivo. (*Sugerencia*: Establezca una restricción por cada día de la semana que asegure que el número adecuado de oficiales *no* está trabajando en un día en particular.)

[†]Basado en Rothstein (1973).

48[‡] Alexis Cornby se gana la vida comprando y vendiendo maíz. El primero de enero, ella tenía 50 toneladas (t) de maíz y 1 000 dólares. Al inicio de cada mes, Alexis puede comprar maíz a los precios siguientes por tonelada: enero, 300 dólares; febrero, 350 dólares; marzo, 400 dólares; abril, 500 dólares. Alexis puede vender el último día de cada mes el maíz a los precios siguientes por tonelada: enero, 250 dólares; febrero, 400 dólares; marzo, 350 dólares; abril, 550 dólares. Alexis almacena su maíz en una bodega en la que caben cuando mucho 100 t de maíz. Ella debe tener la capacidad de pagar en efectivo el maíz en el tiempo de la compra. Con ayuda de la PL determine cómo Alexis puede maximizar su efectivo disponible a fines de abril.

49[§] Finco tiene 400 dólares en efectivo al empezar el mes. Además, Finco recibe al iniciar los meses 1, 2, 3 y 4 ciertos ingresos, después de lo cual paga algunas cuentas (*véase* tabla 78). El dinero que quede se podría invertir por un mes a la tasa de interés de 0.1% por mes; por dos meses, la tasa es de 0.5% por mes; por tres meses, 1% mensual; o bien, por cuatro meses, 2% mensual. Determine mediante programación lineal una estrategia de inversión que maximice el efectivo disponible al inicio del mes 5.

50 La ciudad 1 genera 500 toneladas de desechos por día, y la ciudad 2, 400 toneladas por día. Es necesario incinerar los desechos en el incinerador 1 o en el 2; y cada uno de éstos es capaz de procesar hasta 500 toneladas de desechos por día. El costo por incinerar desechos es de 40 dólares/t en el

TABLA 78

Mes	Ingresos (dólares)	Cuentas (dólares)
1	400	600
2	800	500
3	300	500
4	300	250

[‡]Basado en Charnes y Cooper (1955).
[§]Basado en Robichek, Teichroew, y Jones (1965).

incinerador 1 y 30 dólares/t en el 2. Cada tonelada de desechos se transforma mediante la incineración en 0.2 toneladas de residuos, los cuales se entierran en uno de los dos rellenos sanitarios que hay. Cada relleno sanitario puede recibir cuando mucho 200 toneladas de residuos por día. El transporte por milla de una tonelada de material (residuos o desechos) cuesta 3 dólares/milla. Las distancias (en millas) entre los lugares se indican en la tabla 79. Formule un PL que se pueda usar para minimizar el costo total de la eliminación de basura de ambas ciudades.

51[†] Silicon Valley Corporation (Silvco) fabrica transistores. La fusión del elemento germanio (un componente importante de un transistor) en un horno es un aspecto fundamental de la manufactura de los transistores. El proceso de fundición genera infortunadamente germanio de calidad muy variable.

Es posible aplicar dos métodos para fundir el germanio: el método 1 cuesta 50 dólares por transistor, y el método 2 cuesta 70 dólares por transistor. Las calidades que se obtienen por los métodos 1 y 2 se muestran en la tabla 80. Silvco puede volver a fundir el germanio con el fin de mejorar su calidad. Volver a fundir el germanio para un transistor cuesta 25 dólares. El resultado de volver a fundir el germanio se señala en la tabla 81. Silvco tiene capacidad suficiente de horno para fundir o volver a fundir el germanio cuando mucho para 20 000 transistores por mes. La demanda mensual de Silvco es de 1 000 transistores grado 4, 2 000 transistores grado 3, 3 000 transistores grado 2 y 3 000 transistores grado 1. Utilice la programación lineal para minimizar el costo de producción de los transistores necesarios.

TABLA 79

Ciudad	Incinerador 1	Incinerador 2
1	30	5
2	36	42

Incinerador	Relleno sanitario 1	Relleno sanitario 2
1	5	8
2	9	6

TABLA 80

Grado de germanio fundido[‡]	% de rendimineto por fundición	
	Método 1	Método 2
Defectuoso	30	20
1	30	20
2	20	25
3	15	20
4	5	15

[‡]*Nota:* El grado 1 es pobre; el grado 4 es excelente. La calidad del germanio determina la calidad del transitor fabricado.

[†]Basado en Smith (1965).

TABLA 81

Grado del germanio refundido	% de rendimiento por la refundición			
	Defectuoso	Grado 1	Grado 2	Grado 3
Defectuoso	30	0	0	0
1	25	30	0	0
2	15	30	40	0
3	20	20	30	50
4	10	20	30	50

TABLA 82

Material	Costo (dólares)	Contenido de pulpa (%)
Cartón de cajas	5	15
Papel para envolver	6	20
Papel periódico	8	30
Papel de libros	10	40

52[‡] Una planta recicladora de papel procesa cartón de cajas, papel para envolver, papel periódico y papel de libros, y los transforma en pulpa, la cual se puede usar para elaborar tres grados de papel reciclado (grados 1, 2 y 3). Los precios por tonelada y los contenidos de pulpa de los cuatro tipos de material se proporcionan en la tabla 82. Dos métodos, el desentintado y la dispersión de asfalto, se usan para procesar los cuatro tipos de material y convertirlos en pulpa. Cuesta 20 dólares desentintar una tonelada de cualquier material. El proceso de desentintado elimina 10% de la pulpa del material, por lo que sólo queda 90% de la pulpa original. Aplicar la dispersión de asfalto a una tonelada de material cuesta 15 dólares. La dispersión de asfalto elimina 20% de la pulpa del material. Se pueden someter al proceso de dispersión de asfalto o al proceso de desentintado cuando mucho 3 000 toneladas de material. El papel grado 1 sólo se puede producir a partir de pulpa de papel periódico o de papel de libros; el papel grado 2 sólo se obtiene de pulpa de papel de libros, papel para envolver o de cartón de cajas, y el papel grado 3 sólo se obtiene de pulpa de papel periódico, papel para envolver o de cartón de cajas. Para cumplir con la demanda actual, la compañía requiere 500 toneladas de pulpa para papel grado 1 500 toneladas de pulpa para papel grado 2 y 600 toneladas de pulpa para papel grado 3. Determine un PL para minimizar el costo por cumplir la demanda de pulpa.

53 Turkeyco produce dos tipos de chuleta de pavo que vende a restaurantes de bocadillos. Cada tipo de chuleta consta de carne blanca y carne oscura. La chuleta 1 se vende en 4 dólares/lb, y debe consistir por lo menos en 70% de carne blanca. La chuleta 2 se vende a 3 dólares/lb, y consiste en por lo menos 60% de carne blanca. Se pueden vender, cuando mucho, 50 libras de la chuleta 1 y 30 lb de la chuleta 2. Los dos tipos de pavo usados para elaborar las chuletas se compran en la granja GobbleGobble Turkey. Cada pavo tipo 1 cuesta 10 dólares y rinde 5 lb de carne blanca y 2 lb de carne oscura. Cada pavo tipo 2 cuesta 8 dólares y rinde 3 lb de carne blanca y 3 lb de carne oscura. Plantee una PL para maximizar la utilidad de Turkeyco.

54 Priceler fabrica automóviles sedán y vagonetas. La cantidad de vehículos que se pueden vender en cada uno de los tres meses próximos se indica en la tabla 83. Cada sedán se

[‡]Basado en Glassey y Gupta (1975).

TABLA 83

Mes	Sedanes	Vagonetas
1	1 100	600
2	1 500	700
3	1 200	50

vende en 8 000 dólares, y el precio de cada vagoneta es de 9 000 dólares. Para producir un sedán se requieren 6 000 dólares y 7 500 para fabricar una vagoneta. Mantener por un mes un vehículo en inventario cuesta 150 dólares en el caso del sedán y 200 dólares si se trata de una vagoneta. Se pueden producir durante cada mes, cuando mucho, 1 500 vehículos. Las limitaciones en la línea de producción dictan que de todos los automóviles producidos durante el mes 1 por lo menos dos tercios deben ser sedanes. Al principio del mes 1, se dispone des 200 sedanes y 100 vagonetas. Plantee un PL que se pueda usar para maximizar la utilidad de Priceler durante los próximos tres meses.

55 Los empleados de la línea de producción de Grummins Engine trabajan cuatro días a la semana, 10 h por día. Todos los días de la semana, se requieren las cantidades siguientes (por lo menos) de empleados de la línea: de lunes a viernes, 7 empleados; sábados y domingos, 3 empleados. Grummins tiene 11 empleados en la línea de producción. Formule un PL que se pueda aplicar para maximizar la cantidad de días de descanso consecutivos que reciben los empleados. Por ejemplo, un trabajador que descansa domingo, lunes y miércoles tiene dos días consecutivos libres.

56 El Banco 24 está abierto 24 h al día. Los cajeros laboran dos turnos consecutivos de 6 horas y reciben 10 dólares por hora. Los turnos posibles son los siguientes: medianoche a 6 a.m., 6 a.m. a mediodía, mediodía a 6 p.m., 6 p.m. a medianoche. Las cantidades siguientes de clientes entran al banco durante cada turno: medianoche a 6 a.m., 100; 6 a.m. a mediodía, 200; mediodía a 6 p.m., 300; 6 p.m. a medianoche, 200. Cada cajero atiende hasta 50 clientes por turno. Para modelar un costo por la impaciencia del cliente, suponemos que cualquier cliente que está presente al finalizar un turno "cuesta" al banco 5 dólares. Suponemos además que a la medianoche, todos los clientes deben ser atendidos, de tal manera que el turno de medianoche a 6 a.m. de todos los días inicia con 0 clientes en el banco. Determine un PL que se pueda utilizar para minimizar la suma de mano de obra del banco y los costos de la impaciencia del cliente.

57[†] Los aviones de Transeast Airlines vuelan la siguiente ruta: L.A.-Houston-N.Y.-Miami-L.A. La distancia (en millas) de cada parte de este viaje es como sigue: L.A.-Houston, 1 500 millas; Houston-N.Y., 1 700 millas; N.Y.-Miami, 1 300 millas; Miami-L.A., 2 700 millas. En cada parada, el avión podría comprar hasta 10 000 galones de combustible. El precio del combustible en cada ciudad es como se indica: L.A., 88 centavos; Houston, 15 centavos; N.Y., 1.05 dólares; Miami, 95 centavos. La capacidad del tanque de combustible del avión es de cuando mucho 12 000 galones. Para que exista la posibilidad de volar en círculos sobre una zona de aterrizaje se requiere que el nivel final de combustible por cada tramo del vuelo sea por lo menos de 600 galones. La cantidad de galones que se utilizan por milla en cada tramo del vuelo es

1 + (nivel promedio de combustible en el tramo de vuelo/2 000)

Con el fin de simplificar, suponga que el nivel promedio de combustible en cada tramo del vuelo es

$$\frac{\text{(Nivel de combustible al inicio del tramo)} + \text{(nivel de combustible al final del tramo)}}{2}$$

Determine un PL con la que se pueda minimizar el costo del combustible del vuelo completo.

58[‡] Para procesar los formularios para el impuesto sobre la renta, el Servicio de Ingresos Interno (SII) envía primero cada formulario por el departamento de preparación de datos (PD), en donde la información se codifica para poderla usar en computadora. El formulario se envía al departamento de captura de datos donde se introduce a la computadora. Durante las tres semanas siguientes llegarán las cantidades siguientes de formularios: semana 1, 40 000; semana 2, 30 000; semana 3, 60 000. El SII hace frente a la situación mediante la contratación de empleados que trabajen 40 h por semana mediante un pago de 200 dólares por semana. La preparación de los datos de un formulario requiere 15 min, y para la introducción de datos de un formulario se necesitan 10 min. Se asigna cada semana un empleado a la introducción de datos o a la preparación de datos. El SII debe terminar de procesar todos los formularios al finalizar la semana 5 y desea minimizar el costo para lograr este objetivo. Plantee un PL mediante la cual se determine cuántos empleados deben estar trabajando cada semana y cómo asignar a los trabajadores en las cinco semanas próximas.

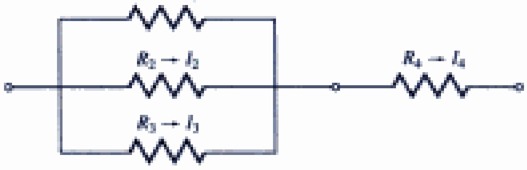
59 En el circuito eléctrico de la figura 11, I_t = corriente (en amperes) fluye a través del resistor t, V_t = caída de voltaje (en volt) en el resistor t, y R_t = resistencia (en ohm) del resistor t. De las leyes del voltaje y la corriente de Kirchoff se infiere que $V_1 = V_2 = V_3$ y $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$. La energía que disipa la corriente que fluye por el resistor t es $I_t^2R_t$. Por la ley de Ohm se infiere que $V_t = I_tR_t$. Las dos partes de este problema se deben resolver en forma independiente.

a Suponga que se requieren $I_1 = 4$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$ y $I_4 = 18$. Asimismo, la caída de voltaje en cada resistor debe estar entre 2 y 10 V. Escoja los valores de R_t para minimizar la energía disipada total. Determine un PL cuya solución resuelva este problema.

b Suponga que se requieren $V_1 = 6$, $V_2 = 6$, $V_3 = 6$, y $V_4 = 4$. Además, la corriente que fluye en cada resistor debe estar entre 2 y 6 amperes. Escoja los valores de R_t para minimizar la energía disipada total. Determine un PL cuya solución resuelva este problema. (*Sugerencia*: Sea $\frac{1}{R_t}$ ($t = 1, 2, 3, 4$) las variables de decisión.

60 El gobierno de Llanview pretende determinar la cantidad de jueces necesarios para atender los casos judiciales. Se estima que durante cada mes del año, el número de horas judiciales necesarias son las que se indican en la tabla 84.

FIGURA 11



[†]Basado en Darnell y Loflin (1977).

[‡]Basado en Lanzenauer y col. (1987).

TABLA 84

Mes	Horas
Enero	400
Febrero	300
Marzo	200
Abril	600
Mayo	800
Junio	300
Julio	200
Agosto	400
Septiembre	300
Octubre	200
Noviembre	100
Diciembre	300

a Cada juez trabaja los 12 meses y es capaz de darse abasto para atender a los casos durante 120 horas al mes. Con el fin de evitar la acumulación, todos los casos se deben negociar antes de finalizar diciembre. Formule un PL cuya solución establezca cuántos jueces necesita Llanview.

b ¿Qué tanto cambia la respuesta si cada juez tiene vacaciones durante un mes al año?

Grupo C

61[†] La tienda de departamentos E.J. Korvair tiene 1 000 dólares en efectivo disponible. E.J., recibirá al principio de cada uno de los seis meses siguientes, ingresos y pagará cuentas según se indica en la tabla 85. Es evidente que E.J. tendrá un problema de flujo de efectivo de corto plazo hasta que la tienda reciba ingresos de la temporada de ventas de Navidad. Para resolver este problema E.J. debe pedir dinero prestado.

Al iniciar julio, E.J. podría pedir un préstamo a seis meses. Cualquier cantidad de dinero que se pida prestado por un periodo de seis meses se debe pagar al finalizar diciembre junto con un interés de 9% (los pagos que se efectúen antes no disminuyen el costo del interés del préstamo). E.J. también podría satisfacer sus necesidades de efectivo mediante un préstamo mensual. El dinero que se pide prestado por un periodo de un mes tiene un costo de intereses de 4% mensual. Utilice la programación lineal para determinar cómo E.J. puede minimizar el costo de pagar las deudas a tiempo.

TABLA 85

Mes	Ingresos (dólares)	Cuentas (dólares)
Julio	1 000	5 000
Agosto	2 000	5 000
Septiembre	2 000	6 000
Octubre	4 000	2 000
Noviembre	7 000	2 000
Diciembre	9 000	1 000

[†]Basado en Robichek, Teichroew, y Jones (1965).

62[‡] Olé Oil elabora tres productos: aceite combustible, gasolina y combustible para aviones. Los índices promedio de octano deben ser, por lo menos, de 4.5 para el aceite combustible, 8.5 para la gasolina y 7.0 para el combustible para aviones. Olé compra dos tipos de petróleo crudo, crudo 1 (12 dólares por barril) y crudo 2 (10 dólares por barril), para fabricar estos productos. Se pueden comprar diariamente cuando mucho 10 000 barriles de cada tipo de crudo.

Antes de que el crudo se utilice para elaborar los productos para la venta se tiene que destilar. Se pueden destilar cuando mucho 15 000 barriles de crudo, al día. Destilar un barril de crudo cuesta 10 centavos. El resultado de la destilación es como sigue: (1) cada barril de crudo 1 rinde 0.6 de barril de nafta, 0.3 de barril de destilado 1 y 0.1 de barril de destilado 2. (2) Cada barril de crudo 2 rinde 0.4 de barril de nafta, 0.2 de barril de destilado 1 y 0.4 de barril de destilado 2. La nafta destilada sólo se puede usar para producir gasolina o combustible para aviones. El aceite destilado se puede utilizar sólo en la producción de aceite combustible, o se puede procesar en el desintegrador catalítico (a un costo de 15 centavos por barril). Cuando mucho se pueden procesar diariamente 5 000 barriles de aceite destilado en el desintegrador catalítico. Cada barril de destilado 1 que se procesa en el desintegrador rinde 0.8 de barril de producto de desintegración o fraccionado 1 y 0.2 de barril de fraccionado 2. Cada barril de destilado 2 que se procesa en el desintegrador catalítico rinde 0.7 de barril de fraccionado 1 y 0.3 de barril de fraccionado 2. Los productos de desintegración se pueden utilizar para elaborar gasolina y combustible para aviones, pero no para producir aceite combustible.

El índice de octano de cada tipo de producto es como sigue: nafta, 8; destilado 1, 4; destilado 2, 5; fraccionado 1, 9; fraccionado 2, 6.

Todo el aceite combustible que se produce se puede vender a 14 dólares por barril; la gasolina producida, a 18 dólares por barril, y el combustible para aviones, a 16 dólares por barril. Las consideraciones del mercado señalan que se deben elaborar todos los días por lo menos 3 000 barriles de cada producto. Plantee un PL para maximizar la utilidad diaria de Olé.

63 Donald Rump es el administrador internacional de fondos para Countribank. El trabajo diario de Donald es determinar cómo los valores en cartera actuales del banco en dólares, libras, marcos y yens se debe ajustar para cumplir con las necesidades diarias de circulante. El tipo de cambio de hoy entre las distintas monedas se da en la tabla 86. Por ejemplo, un dólar se puede convertir en 0.58928 de libra, o bien, una libra se puede transformar en 1.697 dólares.

Al empezar el día, Countribank tiene el capital circulante que se indica en la tabla 87.

Al finalizar el día, Countribank debe tener por lo menos las cantidades de cada moneda que se da en la tabla 88.

TABLA 86

	A			
De	Dólares	Libras	Marcos	Yen
Dólares	1	.58928	1.743	138.3
Libras	1.697	1	2.9579	234.7
Marcos	0.57372	0.33808	1	79.346
Yen	0.007233	0.00426	0.0126	1

[‡]Basado en Garvin y col. (1957).

TABLA 87

Moneda	Unidades (en miles de millones)
Dólares	8
Libras	1
Marcos	8
Yen	0

TABLA 88

Moneda	Unidades (en miles de millones)
Dólares	6
Libras	3
Marcos	1
Yen	10

El objetivo de Donald es transferir fondos cada día de tal modo que el capital circulante satisfaga los mínimos señalados y maximice el valor del dólar del capital circulante al finalizar el día.

Para calcular el valor del dólar de, por ejemplo, una libra, se promedian las dos tasas de conversión. Por lo tanto, una libra vale aproximadamente

$$\frac{1.697 + (1/0.58928)}{2} = 1.696993 \text{ dólares}$$

BIBLIOGRAFÍA

Cada una de las siete obras siguientes son un cuerno de la abundancia de planteamientos interesantes de PL:

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Lawrence, K. y S. Zanakis. *Production Planning and Scheduling: Mathematical Programming Applications*. Atlanta, Ga: Industrial Engineering and Management Press, 1984.

Murty, K. *Operations Research: Deterministic Optimization Models*. Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1995.

Schrage, L. *Linear Integer and Quadratic Programming With LINDO*. Palo Alto, Calif.: Scientific Press, 1986.

Shapiro, J. *Optimization Models for Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming*. Nueva York: Wiley, 1984.

Wagner, H. *Principles of Operations Research*, 2a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1975.

Williams, H. *Model Building in Mathematical Programming*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1985.

Baker, K. "Scheduling a Full-Time Work Force to Meet Cyclic Staffing Requirements," *Management Science* 20(1974):1561-1568. Presenta un método (distinto a LP) para que el personal con un cierto horario cumpla los requisitos de fuerza laboral cíclica.

Balintfy, J. "A Mathematical Programming System for Food Management Applications", *Interfaces* 6(no. 1, pt 2, 1976):13-31. Analiza los modelos de planificación de menús.

Carino, H. y C. Lenoir. "Optimizing Wood Procurement in Cabinet Manufacturing", *Interfaces* 18(no. 2, 1988):11-19.

Chandy, K. "Pricing in the Government Bond Market," *Interfaces* 16(1986):65-71.

Charnes, A. y W. Cooper. "Generalization of the Warehousing Model", *Operational Research Quarterly* 6(1955): 131-172.

Cheung, H. y J. Auger. "Linear Programming and Land Use Allocation", *Socio-Economic Planning Science* 10(1976): 43-45.

Darnell, W. y C. Loflin. "National Airlines Fuel Management and Allocation Model", *Interfaces* 7(no. 3, 1977):1-15.

Dobson, G. y S. Kalish. "Positioning and Pricing a Product Line", *Marketing Science* 7(1988):107-126.

Fabian, T. "A Linear Programming Model of Integrated Iron and Steel Production", *Management Science*, 4(1958): 415-449.

Forgionne, G. "Corporate MS Activities: An Update", *Interfaces* 13(1983):20-23. Trata la fracción de grandes compañías que utilizan la programación lineal (y otras técnicas de investigación de operaciones).

Franklin, A. y E. Koenigsberg. "Computed School Assignments in a Large District", *Operations Research* 21(1973):413-426.

Garvin, W. y col. "Applications of Linear Programming in the Oil Industry", *Management Science* 3(1957):407-430

Glassey, R. y V. Gupta. "An LP Analysis of Paper Recycling". En *Studies in Linear Programming*, ed. H. Salkin y J. Saha. Nueva York: North-Holland, 1975.

Hartley, R. "Decision Making When Joint Products Are Involved", *Accounting Review* (1971):746-755.

Heady, E. y A. Egbert. "Regional Planning of Efficient Agricultural Patterns", *Econometrica* 32(1964):374-386.

Hilal, S. y W. Erickson. "Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming the Production of Heart Valves", *Interfaces* 11(1981):48-56.

Jain, S., K. Stott y E. Vasold. "Orderbook Balancing Using a Combination of LP and Heuristic Techniques", *Interfaces* 9(no. 1, 1978):55-67.

Krajewski, L., L. Ritzman y P. McKenzie. "Shift Scheduling in Banking Operations: A Case Application," *Interfaces*, 10(no. 2, 1980):1-8.

Love, R. y J. Hoey, "Management Science Improves Fast Food Operations", *Interfaces*, 20(no. 2, 1990):21-29.

Magoulas, K. y D. Marinos-Kouris. "Gasoline Blending LP", *Oil and Gas Journal* (18 de julio, 1988):44-48.

Moondra, S. "An LP Model for Workforce Scheduling in Banks", *Journal of Bank Research* (1976).

Myers, S. y C. Pogue. "A Programming Approach to Corporate Financial Management", *Journal of Finance* 29(1974):579-599.

Neave, E. y J. Wiginton. *Financial Management: Theory and Strategies*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1981.

Robbins, W. y N. Tuntiwonpiboon. "Linear Programming a Useful Tool in Case-Mix Management," *HealthCare Financial Management* (1989):114-117.

Robichek, A., D. Teichroew y M. Jones. "Optimal Short-Term Financing Decisions", *Management Science* 12(1965):1-36.

Rohn, E. "A New LP Approach to Bond Portfolio Management", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(1987):439-467.

Rothstein, M. "Hospital Manpower Shift Scheduling by Mathematical Programming", *Health Services Research* (1973).

Smith, S. "Planning Transistor Production by Linear Programming", *Operations Research* 13(1965):132-139.

Stigler, G. "The Cost of Subsistence", *Journal of Farm Economics* 27(1945). Analiza el problema de la dieta.

Sullivan, R. y S. Secrest. "A Simple Optimization DSS for Production P1anning at Dairyman's Cooperative Creamery Association", *Interfaces* 15(no. 5, 1985):46-54.

Weingartner, H. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.